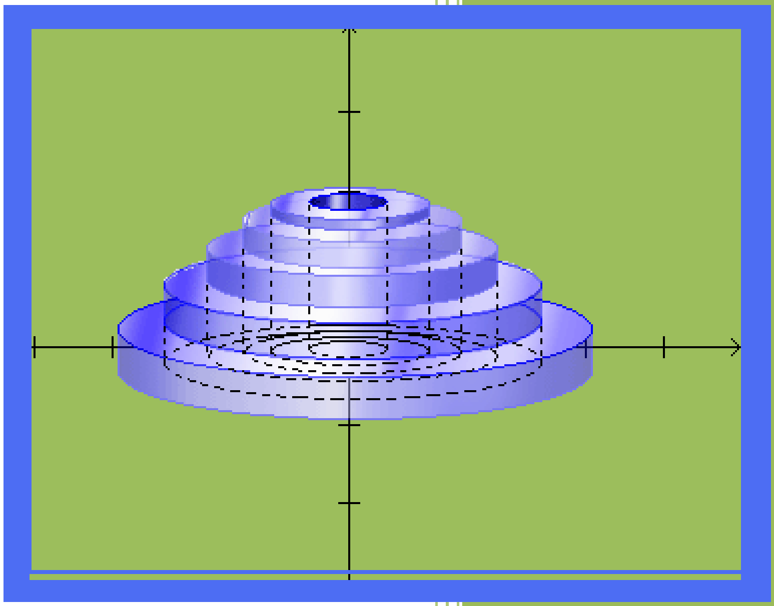
2011

Cálculo Integral: Guía III



Profr. Luis Alfonso Rondero García

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CECYT "WILFRIDO MASSIEU"

15/11/2011

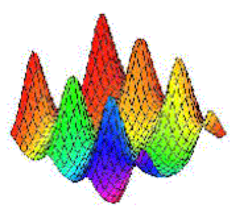
Introducción

Esta guía tiene como objetivo darte una introducción rápida para que inicies el curso de Cálculo Integral, comprendiendo: ¿Qué es? y ¿Cómo se relaciona? con tu curso anterior de Cálculo Diferencial, así como ofrecerte las explicaciones necesarias y los problemas "tipo" resueltos de manera clara y sencilla que aunadas a las explicaciones dadas en clase por tu profesor, te permitirán iniciarte rápidamente en la resolución de integrales inmediatas de tipo algebraico, trigonométrico, exponencial y logarítmico, usando el formulario básico de integrales así como el empleo del método de integración por cambio de variable para resolver aquellas integrales indirectas que no se ajustan aparentemente a ninguna de las fórmulas elementales convenidas.

Los procesos matemáticos empleados en la resolución de integrales requieren de tus conocimientos básicos de algebra y trigonometría, de tu capacidad deductiva y de tu trabajo constante.

"Todos los caminos que conducen al conocimiento son intrincados y difíciles pero representan la mayor aventura que puede tener el intelecto humano"

¡Acepta el reto!



Cálculo Integral

El curso de Cálculo Integral aplica los aprendizajes previos de: Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial, en el estudio significativo de las funciones y sus diferenciales así como sus aplicaciones en el cálculo de áreas de regiones planas limitadas por curvas y el cálculo de volúmenes de sólidos irregulares, longitudes de arco y aplicaciones a la física del movimiento, trabajo y energía, presión, centroides de masa, momentos de inercia, etc..

El cálculo proporciona a los estudiantes, ingenieros y tecnólogos los conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variable real en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La integración se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería y la tecnología aplicada, especialmente en la física, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

Objetivo Particular

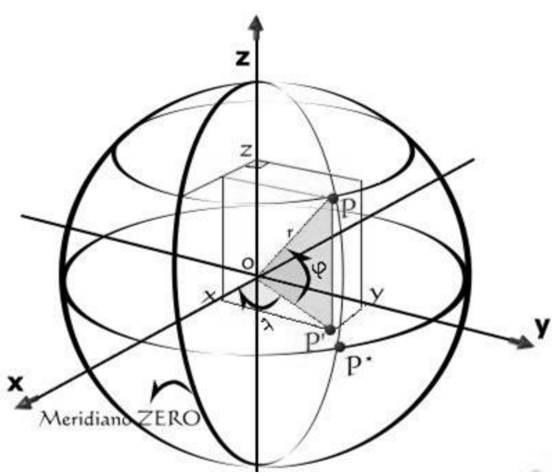
El objetivo principal de ésta guía es la de permitir al estudiante del nivel medio superior acceder a los principales conocimientos del Cálculo Integral de manera sencilla y práctica permitiéndole aplicar los algoritmos fundamentales para resolver con precisión las diferentes integrales que se presentan en diversos campos del quehacer científico y técnico así como realizar la aplicación del cálculo a problemas de áreas entre curvas y volúmenes de sólidos de revolución.

Al término de las tres guías de Cálculo Integral y habiendo realizado TODOS los problemas propuestos de manera satisfactoria, el alumno habrá logrado:

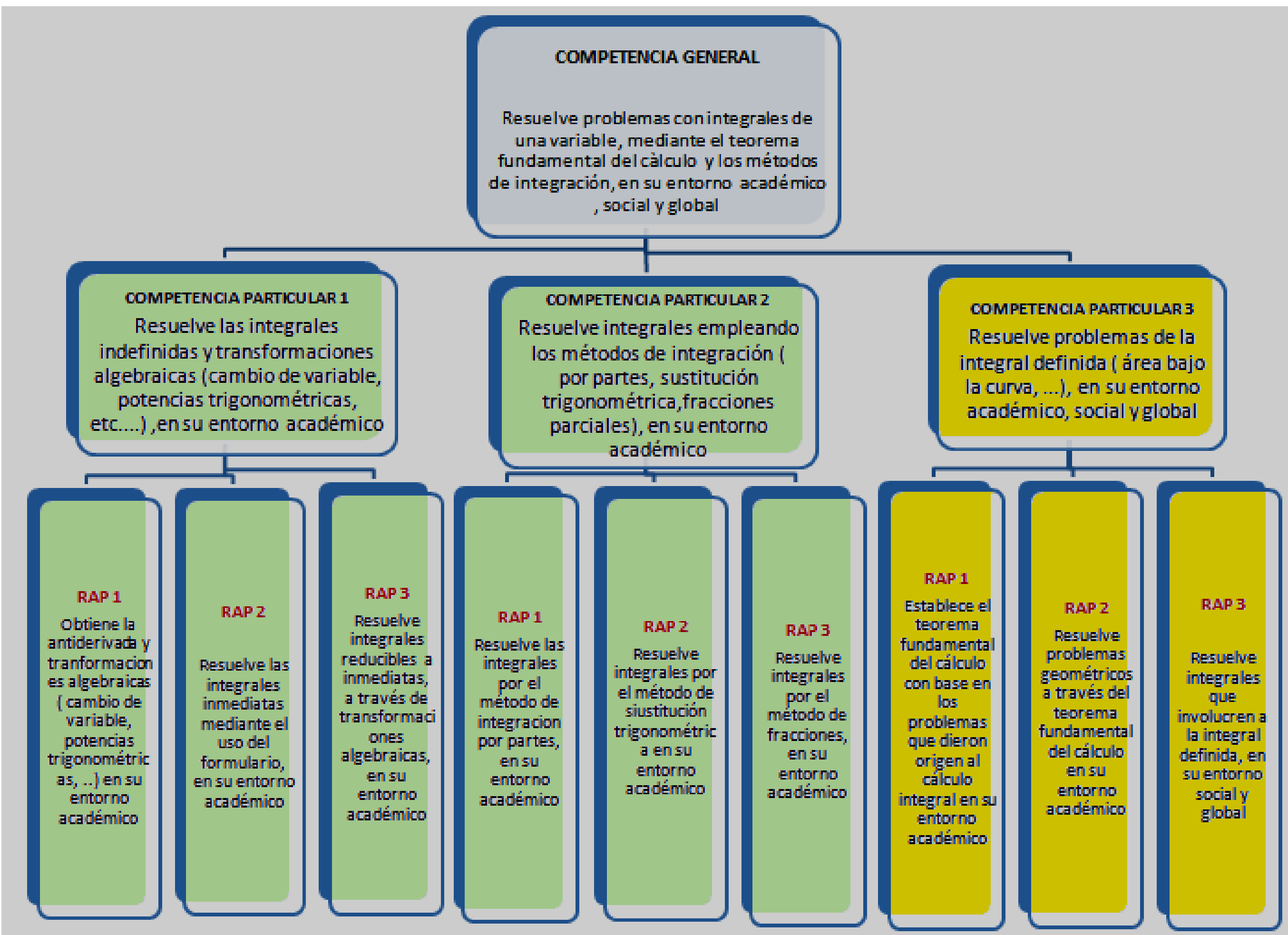
Desarrollar *habilidades y destrezas que le permitan resolver todo tipo de integrales propuestas en el programa y mediante el razonamiento, el análisis y la reflexión; interpretar diversos modelos en términos matemáticos que lo conduzcan a la solución de problemas teórico-prácticos.*

Proponer y plantear *problemas prácticos y teóricos mediante su formulación matemática así como el modelar sistemas físicos a través del manejo de datos y variables establecidas de modo empírico partiendo de las bases adquiridas durante su formación.*

Argumentar y justificar *el porqué del empleo de ciertos modelos matemáticos en la resolución de problemas teóricos y prácticos específicos.*



Ésta guía desarrolla el programa vigente de Cálculo Integral de acuerdo al modelo de competencias



UNIDAD III. INTEGRAL DEFINIDA

Así como el concepto de la derivada proviene del problema geométrico de trazar una tangente a una curva, el problema histórico que conduce la definición de la integral definida es el cálculo de áreas bajo una curva.

Tanto Newton como Leibniz presentaron versiones tempranas de este concepto, sin embargo, fue Riemann quien dio la definición.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

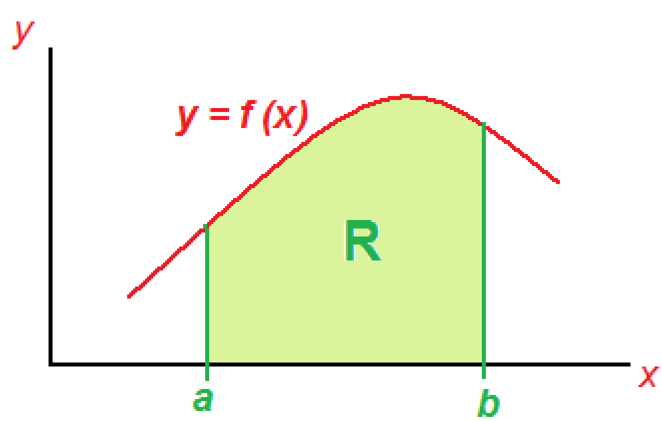
Si una función es continua es un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable siempre en $[a, b]$.

El teorema fundamental del cálculo señala: si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde f es cualquier función.

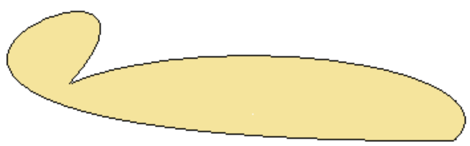
El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva f(x) representada en el plano por la región **R** la cual está limitada además por el eje "x" y las rectas x=a & x=b..



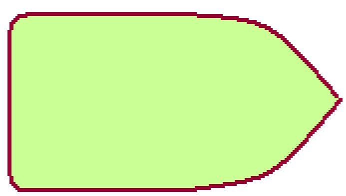
Área de una figura plana

Sabemos calcular el área de algunas figuras planas como, por ejemplo, rectángulos, triángulos, trapecios, círculos, así como cualquier región del plano limitada en su extensión por líneas rectas.

Imaginemos por ejemplo que nuestro problema sea el cálculo del área de una mesa que tiene la siguiente forma:



Ahora supongamos que queremos revestir 10000 piezas de metal con un material aislante de la forma siguiente y por lo tanto será necesario calcular el área de una de ellas. En el intento para calcular el área nos daremos cuenta de que las herramientas matemáticas de que disponemos para dicho cálculo son insuficientes.

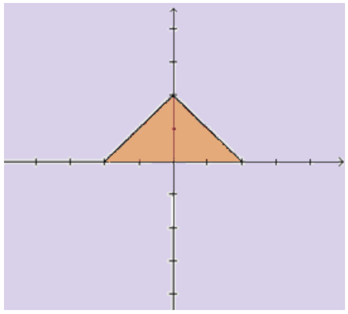


Primeramente, vamos a examinar algunas figuras planas simples que son obtenidas a partir del gráfico de alguna función conocida.

Ejemplo 1

El área de un triángulo, como el mostrado en la figura, que puede ser obtenido a partir del gráfico de la función :

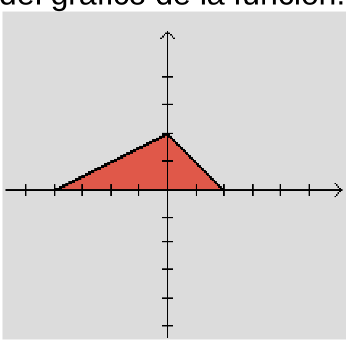
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad -2 \le x \le 0 \\ -x+2 & si \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$$



A=bh/2 A=4(2)/2=4 u^2

Ejemplo2

El área de un triángulo, como el de la figura siguiente, puede ser obtenido a partir del gráfico de la función:



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+4) & ; \quad si \quad -4\le x\le 0\\ -x+2 & ; \quad si \quad 0\le x\le 2\end{cases}$$

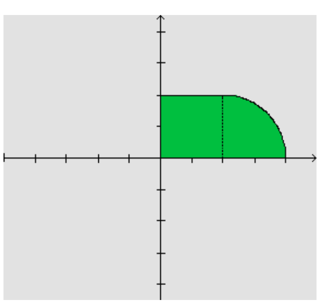
A=bh/2

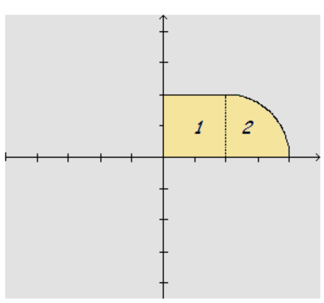
A=6(2)/2=6u^2

Ejemplo 3

El área de la región comprendida entre el eje "x" y el gráfico de la función:

$$f(x)=\begin{cases}2 & ; \quad si \quad 0\le x\le 2\\ \sqrt{4-(x-2)^2} & ; \quad si \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$



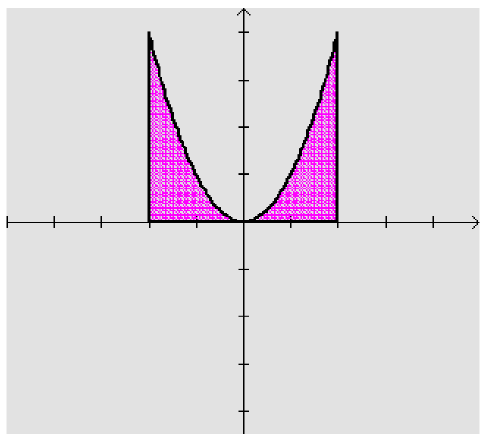


$$A = 2^2 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4}$$

A= 4 + π u^2

Ejemplo 4

El área de una región que se encuentra entre la parábola ***$f(x)=x^2$*** & el eje " x ", para valores de "x" variando en el intervalo [-2,2].



En el intento para calcular ésta región nos damos cuenta de que las herramientas matemáticas de que disponemos para dicho cálculo son insuficientes.

Podemos observar que por una cuestión de simetría bastará con calcular el área de la parte ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano y después duplicar el valor obtenido.

Para saber el valor del área sólo contamos con la geometría plana elemental, por lo que podremos tan solo obtener un valor de aproximación subdividiendo el intervalo [0,2] en cuatro partes iguales é inscribiendo cuatro rectángulos entre la curva y el eje. Para que los rectángulos estén ***inscritos*** necesitamos que el vértice superior izquierdo de los mismos se apoye ó sea punto de la curva.

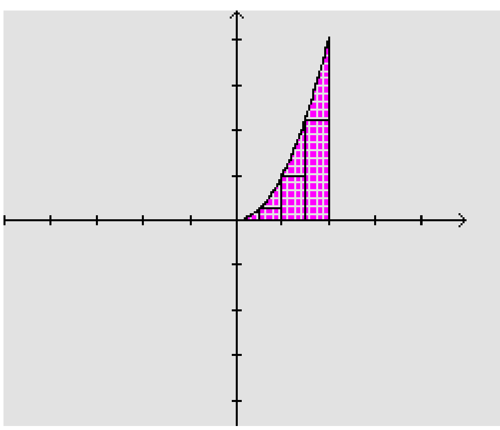
La suma de las áreas de los cuatro rectángulos nos dará un valor aproximado por defecto para el área requerida:

Como el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por la altura y la base de los cuatro rectángulos es la misma : 0.25 y las alturas respectivas son :0,0.5,1,1,5 entonces las alturas deberán siempre obtenerse mediante la función limitante f(x) para el valor inicial de x que sea extremo izquierdo de cada uno de los subintervalos que surgieron por la partición del intervalo original que en este caso son: [0,0.5], [0.5,1], [1,1.5] y [1.5,2] ; de éste modo las alturas respectivas son :

$f(0)=(0)^2=0$, $f(0.5)=(0.5)^2=0.25$, $f(1)=(1)^2=1$, $f(1.5)=(1.5)^2=2.25$

Finalmente el área de la región derecha tiene un valor de aproximación por defecto :

$$A \cong \left(0^2 + 0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2\right)0{,}5 = \left(0{,}25 + 1 + 2{,}25\right)0{,}5 = 1{,}75$$



Si ahora repetimos el proceso pero los mismos cuatro rectángulos los colocamos en forma ***ex inscrita***, es decir que el vértice superior derecho de cada uno de ellos se apoye en la curva y entonces al sumar sus áreas estaremos encontrando un valor de aproximación de la misma por exceso y de éste modo estaremos estableciendo con mayor precisión el área de la región buscada constituyendo un rango.

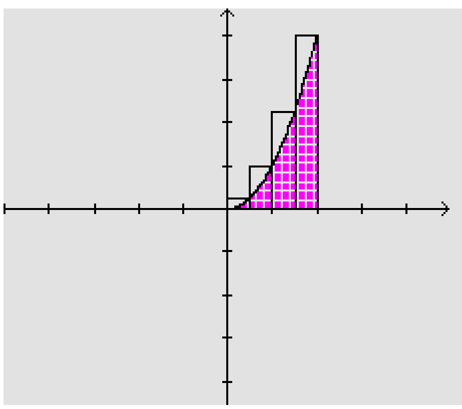
Las alturas deberán siempre obtenerse mediante la función limitante f(x) para que el valor inicial de x sea extremo derecho de cada uno de los sub-intervalos que

surgieron por la partición del intervalo original que en este caso generó los subintervalos: [0,0.5], [0.5,1], [1,1.5] y [1.5,2] ; de éste modo las alturas respectivas son

$f(0.5)=(0.5)^2 = 0.25$, $f(1)=(1)^2=1$, $f(1)=(1.5)^2=2.25$, $f(2)=(2)^2=4$

Finalmente el área de la región derecha tiene un valor de aproximación por exceso :

$$A \cong \left(0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2 + 2^2\right)0{,}5 = \left(0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4\right)0{,}5 = 3{,}75$$



De ésta manera el área de la región que se encuentra limitada por la parábola: $f(x) = x^2$, el eje "x" y las rectas verticales : x=0 & x=2 se encuentra comprendida entre **1.75** y **3.75**

Finalmente podemos establecer que el área de la región original en éste problema está comprendido entre 2(1.75)=3,5 & 2(3.75)=7,5

$$3{,}5 \leq 2A \leq 7{,}5$$

Este valor de aproximación lo podemos mejorar aumentando el número de rectángulos inscritos y ex inscritos.

• Subdividiendo el intervalo original: [0,2] en ***ocho*** partes iguales, podemos inscribir 8 rectángulos construidos de modo que la base superior esté siempre por debajo de la curva, para lo cual el vértice superior izquierdo de cada rectángulo deberá estar apoyado en la curva. Los sub-intervalos que surgieron por la partición

del intervalo original en ocho partes iguales son:

[0,0.25], [0.25,0.5], [0.5,0.75] ,[0.75,1] ,[1,1.25] ,[1.25,1.50] ,[1.50,1.75] ,[1.75,2] .

La suma de las áreas de esos ocho rectángulos nos dará un mejor valor de aproximación por defecto del área buscada que el empleo de tan solo cuatro rectángulos.

La base de los nuevos rectángulos es ahora de 0.25 y las alturas respectivas son:

$f(0)=(0)^2=0$, $f(0.25)=(0.25)^2=0.0625$, $f(0.5)=(0.5)^2=0.25$, $f(0.75)=(0.75)^2=0.5625$
$f(1)=(1)^2=1$, $f(1.25)=(1.25)^2=1.5625$, $f(1.5)=(1.5)^2=2.25$, $f(1.75)=(1.75)^2=3.0625$

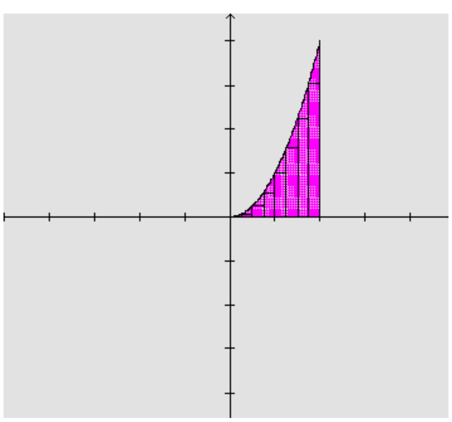
Finalmente el área de la región derecha tiene un valor de aproximación por defecto:

$$A \cong \left(0^2+0{,}25^2+0{,}5^2+0{,}75^2+1^2+1{,}25^2+1{,}5^2+1{,}75^2\right)0{,}25=$$

$$=\left(0+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4^3}\cdot\frac{7.(7+1)(14+1)}{6}=\frac{35}{16}$$



Si ahora repetimos el proceso pero los mismos ocho rectángulos los colocamos en forma ***ex inscrita***, es decir que el vértice superior derecho de cada uno de ellos se apoye en la curva y entonces al sumar sus áreas estaremos encontrando un valor de aproximación de la misma por exceso y de éste modo estaremos estableciendo con mayor precisión el área de la región buscada constituyendo un rango.

Las alturas deberán siempre obtenerse mediante la función limitante f(x) para que el valor inicial en x sea extremo derecho de cada uno de los sub-intervalos que surgieron por la partición del intervalo original en ocho sub-intervalos que en éste caso son: [0,0.25], [0.25,0.5], [0.5,0.75] ,[0.75,1] ,[1,1.25] ,[1.25,1.50] ,[1.50,1.75] ,[1.75,2] ;

La base de los nuevos rectángulos es también de 0.25 y las alturas respectivas son:

$f(0.25)=(0.25)^2=0.0625$, $f(0.5)=(0.5)^2=0.25$, $f(0.75)=(0.75)^2=0.5625$, $f(1)=(1)^2=1$, $f(1.25)=(1.25)^2=1.5625$, $f(1.5)=(1.5)^2=2.25$, $f(1.75)=(1.75)^2=3.0625$, $f(2)=(2)^2=4$

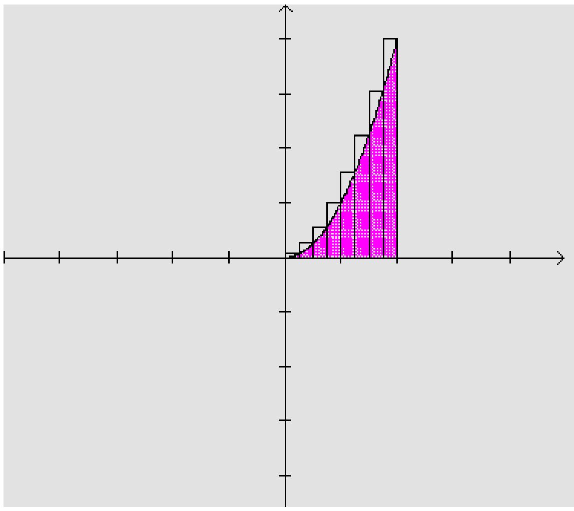
Finalmente el área de la región derecha tiene un valor de aproximación por exceso:

$$A \cong \left(0{,}25^2+0{,}5^2+0{,}75^2+1^2+1{,}25^2+1{,}5^2+1{,}75^2+2^2\right).0{,}25=$$

$$=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{4}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{8}{4}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4^3}\cdot\frac{8.(8+1)(16+1)}{6}=\frac{51}{16}$$



De ésta manera el área de la región que se encuentra limitada por la parábola: $f(x)=x^2$, el eje "x" y las rectas verticales : x=0 & x=2 se encuentra comprendida entre **35/16=2.1875** y **51/16=3.1875**

Finalmente podemos establecer que el área de la región original en éste problema está comprendida entre 2(2.1875)=4.375 & 2(3.1875)=6.375

$$4{,}375 \leq 2A \leq 6{,}375$$

Como hemos visto, aumentando el número de sub-intervalos mejora notablemente el valor de aproximación del área de la región considerada, sin embargo el método es muy laborioso y no exacto.

¿Qué significa una Integral Definida?

Es la evaluación de una integral entre los valores límites de un intervalo numérico: entre un límite superior "b" y un límite inferior "a".

Entonces, la integral tiene un valor definido en el intervalo cerrado $[a, b]$, que depende de la función f(x) y del intervalo escogido. La integral definida es entonces una cantidad expresada mediante un número.

El símbolo de la integral definida es:

$\int_a^b y dx$ ó $\int_a^b f(x)dx$ y se lee: "La integral desde "a" hasta "b".

Y se calcula por: ***"Teorema fundamental del cálculo***" $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Lo que nos dice: La integral definida de una función continua en un intervalo dado, es igual a la diferencia de los valores de una de sus primitivas en los extremos de un intervalo.

Una integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

es un ***número***, mientras que una integral indefinida :

$$\int f(x)\, dx$$

es una ***función***.

PASOS PARA RESOLVER UNA INTEGRAL DEFINIDA.

1. Se resuelve la integral como indefinida, haciendo caso omiso de la constante de integración.

2. El resultado anterior se encierra dentro de un paréntesis rectangular afectado por los límites de integración.

3. En la primitiva encontrada, se sustituye en lugar de la variable el límite superior y se le resta lo que resulta de sustituir el límite inferior.

EJEMPLOS:

$$1.\int_1^3 x^2dx$$

$$\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}$$

$$2.\int_{-1}^0 (x-2)dx$$

$$\int_{-1}^0 (x-2) = \int_{-1}^0 dxd - 2\int_{-1}^0 dx = \frac{x^2}{2}-2x\Bigg]_{-1}^0 = \left[\frac{0^2}{2}-2(0)\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right] = -\frac{5}{2}$$

$$3.\int_0^1 2xdx$$

$$\int_0^1 2xdx = 2\int_0^1 xdx = \frac{2x^2}{2}\Bigg]_0^1 = x^2\Big]_0^1$$

$$4.\int_{-1}^1 (t^2-2)dt$$

$$\int_{-1}^1 (t^2-2)dt = \int_{-1}^1 t^2dt - 2\int_{-1}^1 dt = \frac{t^3}{3}-2t\Bigg]_{-1}^1 = \left[\frac{1^3}{3}-2(1)\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)\right] = -\frac{10}{3}$$

$$5.\int_0^1 (2t-1)^2\,dt$$

$$\int_0^1 (2t-1)^2 = \int_0^1 (4t^2-4t+1)dt = 4\int_0^1 t^2dt - 4\int_0^1 tdt + \int_0^1 dt = \frac{4t^3}{3}-\frac{4t^2}{2}+t =$$

$$= \left[\frac{4(1)^3}{3}-\frac{4(1)^2}{2}+1\right]-\left[\frac{4(0)^3}{3}-\frac{4(0)^2}{2}+0\right] = \left[\frac{4}{3}-\frac{6}{3}+\frac{3}{3}\right]-[0] = \frac{1}{3}$$

$$6.\int_1^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx = 3\int_1^2 x^{-2}dx - \int_1^2 dx =$$

$$= \frac{3x^{-1}}{-1}-x\Bigg]_1^2 = -\frac{3}{x}-x\Bigg]_1^2 = \left[-\frac{3}{2}-2\right]-\left[-\frac{3}{1}-1\right] = -\frac{7}{2}+4 = \frac{1}{2}$$

7. $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{t-2}\right)dt$

$$\int_{-1}^{1} t^{\frac{1}{3}}dt-2\int_{-1}^{1}dt=\left.\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-2t\right]_{-1}^{1}=\left.\frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}-2t\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}-2(1)\right]-\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(-1)^4}-2(-1)\right]=$$

$$=-\frac{5}{4}-\frac{11}{4}=-4$$

8. $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

$$\int_{0}^{4}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_{0}^{4}u^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{4}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\left.u^{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{4}=\left.\sqrt{2x+1}\right]_{0}^{4}=$$

$$=\sqrt{2(4)+1}-\sqrt{2(0)+1}=3-1=2$$

$u=(2x+1)$

$du=2dx$

$\frac{du}{2}=dx$

9. $\int_{-1}^{1}x\left(x^2+1\right)^3dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)^3xdx$

$$\int_{-1}^{1}u^3\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^3du=\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}=\left.\frac{1}{8}\left(x^2+1\right)^4\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{8}\left(1^2+1\right)^4\right]-\left[\frac{1}{8}\left(\left(-1^2\right)+(-1)\right)^4\right]=2-2=0$$

$u=x^2+1$

$du=2xdx$

$\frac{du}{2}=xdx$

10. $\int_0^2 x^3 \sqrt{4+x^2}\,dx$

$$\int_0^2 \left(4+x^2\right)^{\frac{1}{3}} x dx = \int_0^2 u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 u^{\frac{1}{3}} \cdot du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}\Bigg]_0^2 =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(4+2^2\right)^4} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(4+0^2\right)^4} = 6 - 2.3811 = 3.619$$

$u = 4 + x^2$

$du = 2xdx$

$\frac{du}{2} = xdx$

11. $\int_0^2 x(x^2+1)^3\; dx = \int_0^2 (x^2+1)^3\, x dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+1)^3\, 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^4}{4}\Big|_0^2$$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{8}\Big|_0^2$$

$$= \frac{(2^2+1)^4}{8} - \frac{0^2+1)^4}{8}$$

$$= \frac{5^4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{624}{8} = 78\, u^2$$

12.- $\int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)\, dx$

$$\int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)\, dx = -\int_1^2 x^2\; dx + 5\int_1^2 x\; dx - 4\int_1^2 dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{5\,x^2}{2}\Big|_1^2 - 4x\Big|_1^2$$

$$=\left[-\frac{2^3}{3} - \left(-\frac{1^3}{3}\right)\right] + \left[\frac{5(2)^2}{2} - \frac{5(1)^2}{2}\right] - [4(2) - \langle 4(1)\rangle]$$

$$= -\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{20}{2} - \frac{5}{2}\right] - [8-4]$$

= - $\left[\frac{7}{3}\right]$ + $\left[\frac{15}{2}\right]$ – 4 = - $\frac{7}{3}$ + $\frac{15}{2}$ - 4

= $\frac{7}{6}\,u^2$ = 1 $\frac{1}{6}\,u^2$

13.- $\int_0^3 (3\,x^2 - \ 4x + 1)\,dx$

$\int_0^3 (3\,x^2 - \ 4x + 1)\,dx$ =3$\int_0^3 x^2\,dx - \ 4\int_0^3 x\ dx + \ \int_0^3 dx$

= $\frac{3x^3}{3}\,|_0^3$ - $\frac{4x^2}{2}\,|_0^3$ + x $|_0^3$

= $x^3\,|_0^3$ - 2 $x^2\,|_0^3$ + x $|_0^3$

= (3^3 - 0^3) – $[2(3)^2 - \ 2(0)^2]$ + (3-0)

= 27-(18-0) + 3 = 27+18+3

= 12u^2

14.- $\int_3^6 (x^2 - 2x)\,dx$

$\int_3^6 (x^2 - 2x)\,dx$= $\int_3^6 x^2\,dx - \ 2\int_3^6 x\,dx$

= $\frac{x^3}{3}\,|_3^6$ - $\frac{2x^2}{2}\,|_3^6$

= $\left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right)$ - $(6^2 - 3^2)$

= $\left(\frac{216}{3} - \frac{27}{3}\right) - (36 - 9)$ = $\frac{189}{3} - 27$

= 63-27 = 36u^2

15.- $\int_0^3 \ (6x^2 + \ 1)\,(2x^3 + \ x)^2 dx$

HACIENDO EL CAMBIO DE VARIABLE

u=2x^3+x

$\frac{du}{dx}$ = $6x^2 + 1$

$\int_0^3 (6x^2+1)\,(2x^3+x)\,dx = \frac{(2x^3+x)^3}{3}\Big|_0^3$

$= \frac{(2\,(3)^3+3)^3}{3} - \frac{[2(0^3)]^3}{3}$

$= 61{,}731u^2$

ACTIVIDAD I. Resolver las siguientes integrales definidas.

1)	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$	6)	$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$	11)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx$
2)	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	7)	$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x\, dx$	12)	$\int_0^{\pi} \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$
3)	$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, dx$	8)	$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$	13)	$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$
4)	$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$	9)	$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx$	14)	$\int_{-1}^{1} (\operatorname{arc} \cos x)^2\, dx$
5)	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	10)	$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x}$	15)	$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Propiedades de la integral definida.

1.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ cualquiera que sea *f*.

2.- Si $f(x) > 0$ y continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$,

y si $f(x) < 0$ en todo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx < 0$.

3.- Si $a < b < c$ y *f* es continua en $[a,c]$

entonces: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4.- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$

5.- $c\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c \cdot f(x)\,dx$ cualquiera que sea el número *c*.

6.-

a) Si para cada $x \in [a,b]$ es $f(x) \le g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

b) Si para cada $x \in [a,b]$ es $f(x) \ge g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

7.- Si *f* es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un número $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Esta propiedad se llama **teorema del valor medio del cálculo integral.**

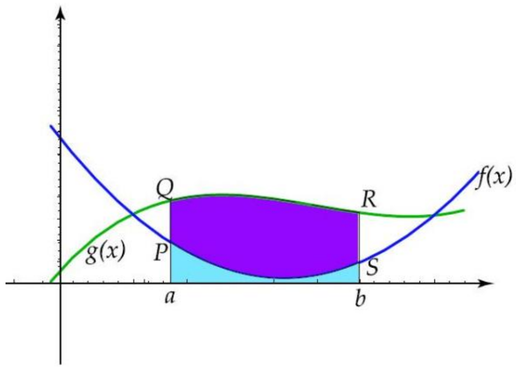
Si *f* & *g* son dos funciones integrables en [a,b] con a<b y además *f (x) ≤ g(x)*

∀*x* ∈ [a,b] entonces se cumple :

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Gráficamente observamos en **Fig. 1** que el área bajo f(x) está representada por el trapecio curvo PabS en color azul y es menor que el área del trapecio curvo QabR que representa el área bajo g(x)

Figura 1



UNIDAD IV. APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

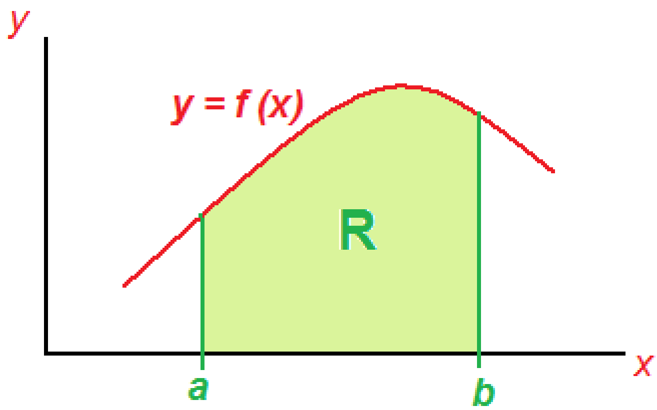
4.1.1 ÁREA BAJO LA CURVA.

El teorema fundamental del cálculo señala que si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces existe la integral definida:

Fórmula 1 : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

donde f es cualquier función.

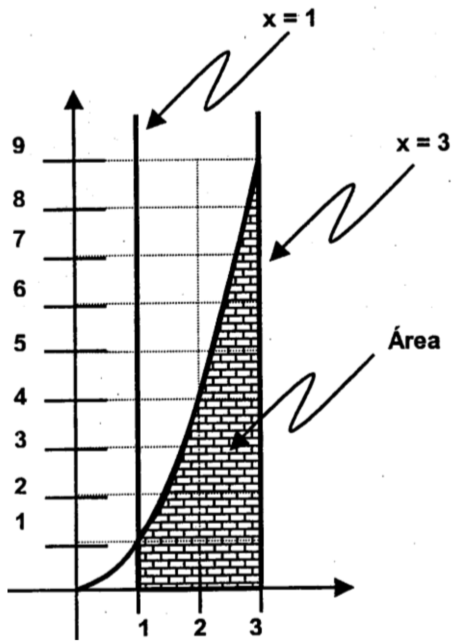
El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva f(x) representada en el plano por la región **R** la cual está limitada además por el eje "x" y las rectas x=a & x=b..



Ejemplo 1

Calcular el área de la región limitada por la curva: $y = x^2$ & las rectas: x-1=0 & x-3=0

X	Y
3	9
2	4
1	1
0	0



$$\int_1^3 x^2 dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{3} u^2 = 8.66\, u^2$$

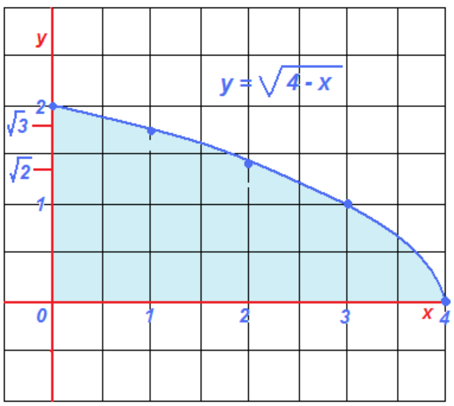
Ejemplo 2

Determina el área acotada por la parábola: $y^2 + x - 4 = 0$ & el primer cuadrante del plano cartesiano. Presentar dos soluciones: Integrar con respecto a "x" y después integrar con respecto a "y". Trazar la grafica.

Tabulando:

$y = \sqrt{4 - x}$

x	y
4	0
3	1
2	$\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}$
0	2



Integrando con respecto a "Y"

Dada $y = \sqrt{4 - x}$ despejamos la variable "x" : $x = 4 - y^2$

$$\int_0^2 (4 - y^2)dy = 4y - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \left[4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - [0] = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5.33u^2$$

Integrando con respecto a "X"

$$\int_0^4 \sqrt{4 - x}dx = -\frac{2(4 - x)^{3/2}}{3}\Big|_0^4 = -\frac{2(4 - 4)^{3/2}}{3} - \left[\frac{-2(4 - 0)^{3/2}}{3}\right] = \frac{2(8)}{3} = \frac{16}{3} = 5.33u^2$$

Como pudimos observar en éste caso,la integración con respecto a "x" ó a "y" da el mismo resultado pero se dificulta el cálculo al integrar respecto a "Y" , asi que es ésta la verdadera razón de optar por una ú otra integración.

Ejemplo 3

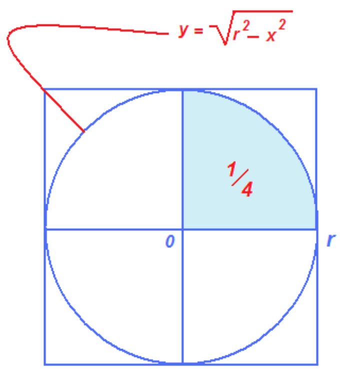
Hallar el área de una circunferencia con radio 8. Se sugiere emplear la fórmula canónica de la circunferencia. Trazar gráfica.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r^2}{2} arc\,sen \frac{x}{r}\Big|_0^r$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2} arc\,sen \frac{r}{r}\left(\frac{0}{2}\sqrt{r^2 - 0^2} + \frac{r^2}{2} arc\,sen \frac{0}{r}\right)$$

$$= \frac{r^2}{2} arc\,sen 1 = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \left(\frac{r^2\pi}{4}\right)$$

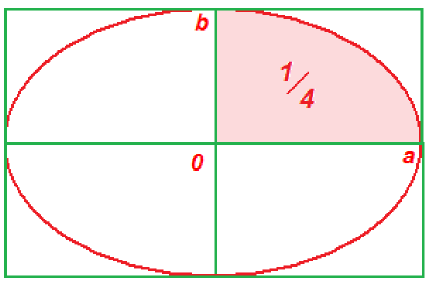
Como la región analizada es la cuarta parte de la circunferencia debemos entonces multiplicar por 4 el área obtenida para así tener el área total: A= $\left(\frac{r^2\pi}{4}\right)$ (4) = $\pi\ r^2$



Ejemplo 4

Hallar el área de la elipse (*se sugiere emplear la fórmula canónica de la elipse*). Trazar la gráfica.

Fórmula canónica.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{bx}{2a} arc\,sen\frac{x}{a}\Big|_0^a$$

$$=\frac{ba}{2a}\sqrt{a^2-a^2}+\frac{ba}{2}arc\,sen\frac{a}{a}-\left[\frac{b(0)}{2a}\sqrt{a^2-0}+\frac{ba}{2}arc\,sen\frac{0}{a}\right]$$

$$=ab\frac{\pi}{4} \rightarrow se\,multiplica\ \ por\,4\,para\ obtener\ el\ área$$

$$A=ab\pi\,u^2$$

Área entre dos curvas.

La ***Figura 1*** nos permite ver claramente que la región de color morado representa la región comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) & g(x) y las rectas x=a & x=b.

El área bajo g(x) está representada por el trapecio curvilíneo QabR y se calcula con: $\int_a^b g(x)dx$.

El área bajo f(x) está representada por el trapecio curvilíneo PabS y se calcula con: $\int_a^b f(x)dx$.

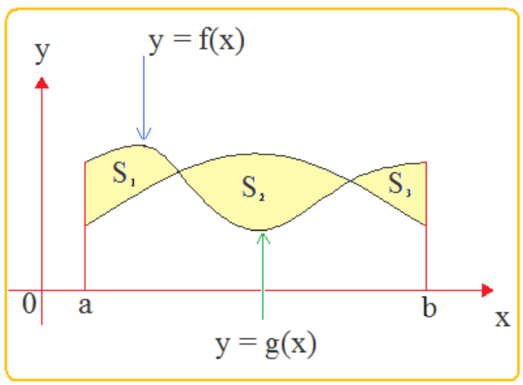
Como el trapecio QabR es mayor que el trapecio PabS entonces queda claro que al restar ambas regiones se obtiene la intermedia (***región morada***) por lo que:

$$A = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)dx$$

Y como una resta de integrales equivale a la integral de una resta simplificamos la expresión como:

$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ siendo g(x)≥f(x)

Si se requiere calcular el área comprendida entre las curvas :
y = $f(x)$ & $y = g\,(x)$, en donde $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$ para algunos valores de x pero $\boldsymbol{g(x) \geq f(x)}$ para otros valores de x, entonces la región dada S se divide en varias regiones $S_{1'}$ $S_{2'}$ … con áreas $A_{1'}$ $A_{2'}$ … como se muestra en la ***gráfica 2*** :



Gráfica 2

Luego, definimos el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones menores: $S_{1'}$ $S_{2'}$ …: A = $A_{1'}$ + $A_{2'}$ +… Puesto que

$$|\,f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) \; cuando \; f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) \; cuando \; g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

Se tiene la siguiente expresión de A:

El área comprendida entre las curvas y = $f(x)\ y\ g(x)$, y entre las rectas x = a y x = b es: $A = V = \int_a^b |\,f(x) - g(x)|\,dx$

Sin embargo, cuando se calcula la integral en ***Fórmula 1*** todavía debemos dividirla en integrales correspondientes a: A_1, A_2, …etc.

Ejemplo 1

Determina el área de la región acotada por la parábola: $y^2 - 4x = 0$ ……(1)
y la recta : $y = 2x - 4$ …..(2) .Trazar la grafica correspondiente.

Sugerencia: integrar con respecto al eje de las ordenadas.

Despejando "x" en ambas ecuaciones tenemos : En (1) : x = y^2 **/** 4 ; En (2) : x = y+4 **/** 2

Igualando "x" : $\frac{y^2}{4} = \frac{y+4}{2}$

$y^2 = 2y + 8$; $y^2 - 2y - 8 = 0$; $(y-4)(y+2) = 0$; De éste modo hallamos los límites de integración : $y_1 = -2$, $y_2 = 4$

$$\therefore \int_{-2}^{4}\left[\frac{y+4}{2} - \left(\frac{y^2}{4}\right)\right]dy = \int_{-2}^{4}\frac{2(y+4)-y^2}{4}dy = \frac{1}{4}\int_{-2}^{4}(2y+8-y^2)dy = \frac{1}{4}\left[y^2+8y-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4^2+8(4)-\frac{4^3}{3}\right] - \frac{1}{4}\left[(-2)^2+8(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right] = \frac{1}{4}\left[48-\frac{64}{3}\right] - \frac{1}{4}\left[-12+\frac{8}{3}\right] = 9u^2$$

Graficando

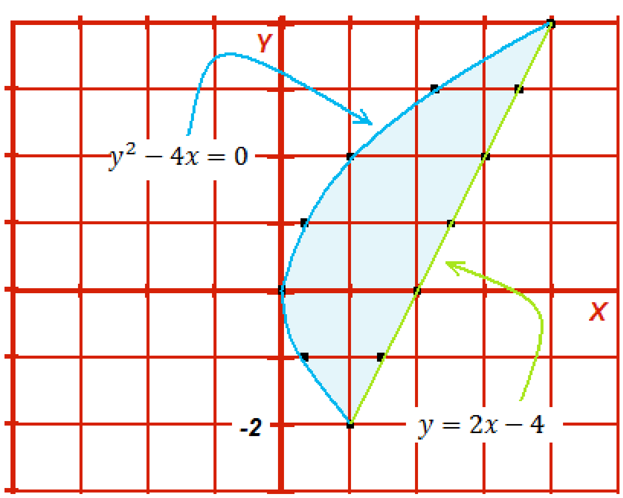
:

Parábola

X	Y
1	-2
0.25	-1
0	0
0.25	1
1	2
2.25	3
4	4

Recta

X	Y
1	-2
1.5	-1
2	0
2.5	1
3	2
3.5	3
4	4



Ejemplo 2

Calcular el área de región limitada por las parábolas $y = x^2$ & $y = 2x - x^2$.

Solución: Primeramente se encuentran los puntos de intersección de las parábolas resolviendo sus ecuaciones simultáneamente. Esto da: $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 = 2x$ & ∴ $x(x-1) = 0$, de tal modo que $x_1 = 0$ & $x_2 = 1$. Los puntos de intersección son (0, 0) y (1, 1) y la región se muestra en la ***Figura 1.***

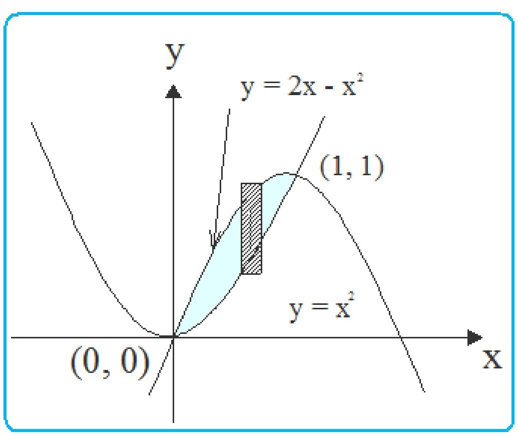
Al hacer uso de la **Fórmula 1**: $A = V = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ para calcular el área es importante asegurarse de que $f(x) \geq g(x)$ cuando a $\leq x \leq$ b. En este caso, en la gráfica se puede ver que:

$$2x - x^2 \geq x^2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

Y así se elige $\boldsymbol{f(x) = 2x - x^2}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2}$, a = 0 y b = 1.

Entonces :

$$A = \int_0^1 [(2x - x^2)] - x^2\,] = \int_0^1 2(x - x^2)\; dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\;]_0^1 = 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] = \frac{1}{3}$$

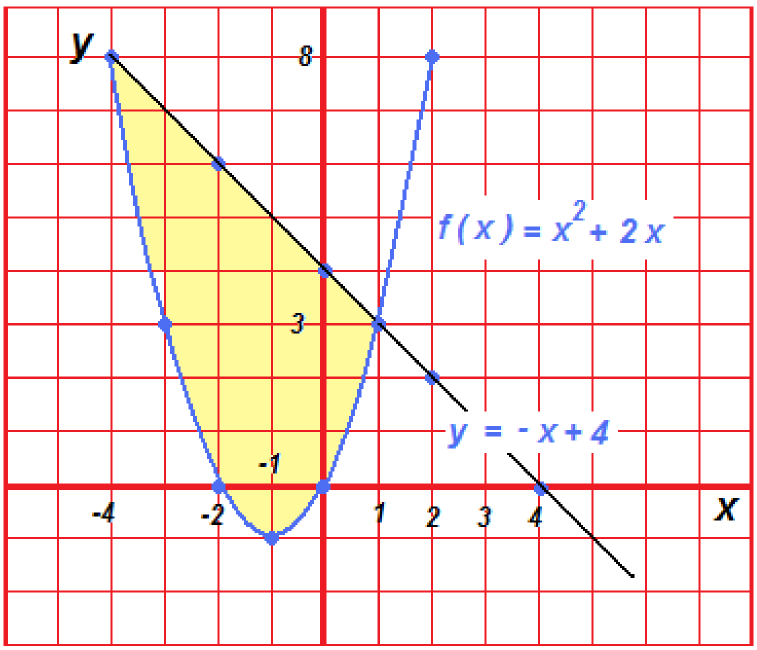


Gráfica 1

Ejemplo 3

Determina el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$f(x)=x^2+2x$ & $f(x)=-x+4$



$$\int_{-4}^{1}\left[(-x+4)-(x^2+2x)\right]dx=\int_{-4}^{1}\left[-x^2-3x+4\right]dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\Big|_{-4}^{1}=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4-\frac{64}{3}+24+16$$

$$=\frac{-2-9+24-128+144+96}{6}=\frac{125}{6}=20.8u^2$$

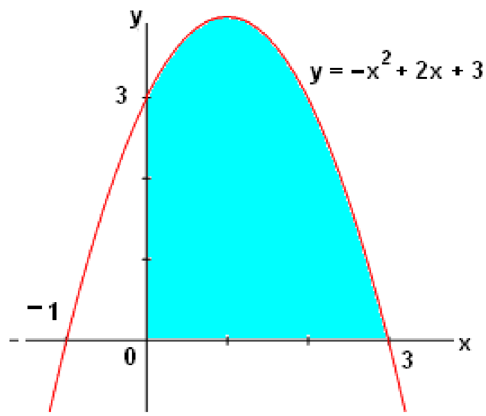
UNIDAD IV. APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

4.1.1 *ÁREA BAJO LA CURVA*.PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el área limitada por la gráfica de la función:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

y las rectas : x=0 & x-3=0



$$\int_0^3 (-x^2+2x+3)dx = -\int_0^3 x^2dx + 2\int_0^3 xdx + 3\int_0^3 dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\Big]_0^2 =$$

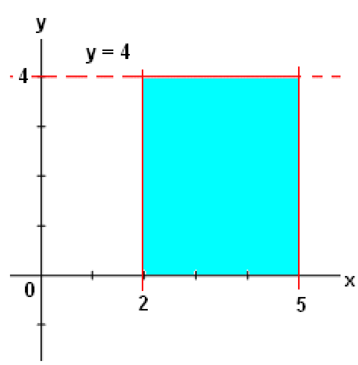
$$= -\frac{(2)^3}{3} + (2)^2 + 3(2) = -\frac{8}{3} + 4 + 6 = \frac{22}{3} = 7.3u^2$$

2. Hallar el área limitada por la función:

f(x) = 4

x -5= 0

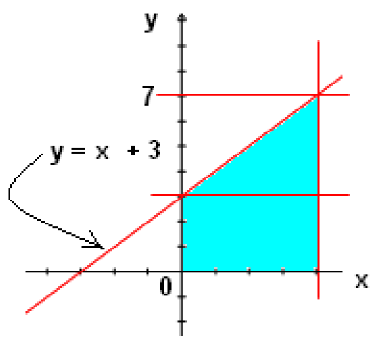
x – 2 = 0



$$\int_2^5 4dx = 4(5) - 4(2) = 20 - 8 = 12u^2$$

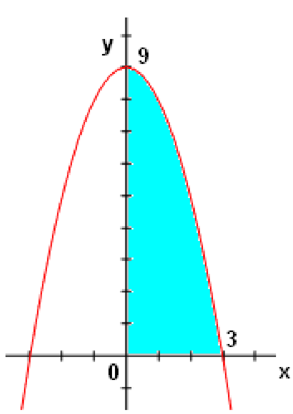
3. **Obtener el área de la región comprendida entre y-x=3 ,y=0 ,x-4 =0 y el eje "y".**

$$\int_0^4 3+xdx=3\int_0^4 dx=3x+\frac{x^2}{2}\Big]_0^4=3(4)+\frac{(4)^2}{2}=12+8=20u^2$$



Comprobar el resultado por un método geométrico elemental.

4. **Calcula el área de la parábola $f(x)=9-x^2$ que está limitada por el primer cuadrante del plano cartesiano. Trazar la gráfica.**



$$\int_0^3 9-x^2=9\int_0^3 dx-\int_0^3\frac{x^3}{3}=9x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^3=9(3)-\frac{(3)^3}{3}=27-9=18u^2$$

5. Calcule el área de la sinusoide en los siguientes intervalos y muestra mediante una gráfica los valores obtenidos:

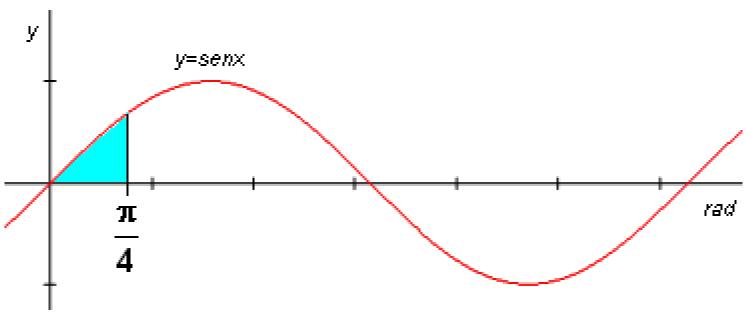
$a) 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

$b) 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

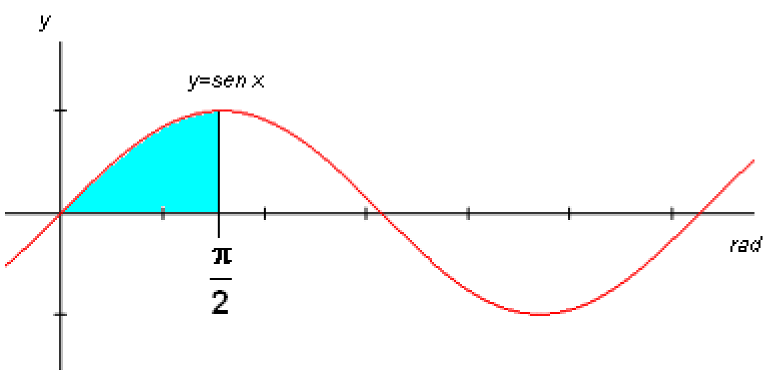
$c) \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$d) 0 \le x \le \pi$

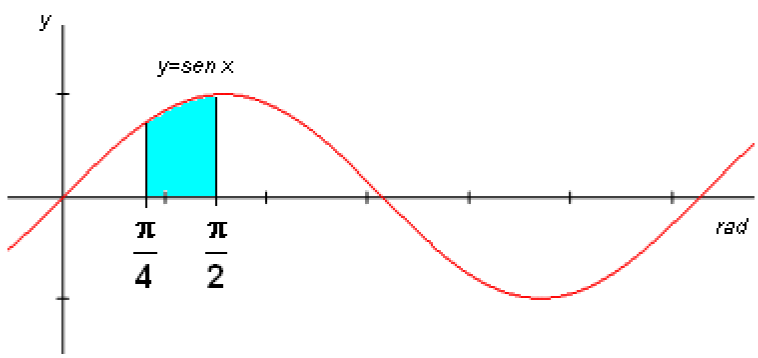
$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} senxdx = -\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos 45^\circ - (-\cos 0^\circ) = -071 + 1 = 0.29u^2$$



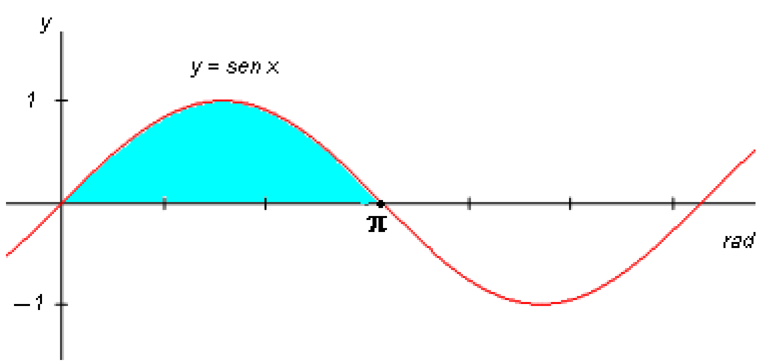
$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx = -\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos 90^\circ - \cos 0^\circ = 1u^2$$



$$c)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} senx = -\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos 90^{\circ} - \cos 45^{\circ} = 0.7u^{2}$$



$$d)\int_{0}^{\pi} senxdx = -\cos x\Big]_{0}^{\pi} = -\cos 180^{\circ} - \cos 0^{\circ} = 2u^{2}$$



6. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$y = x^2$

$x - 1 = 0$

$x - 3 = 0$

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3} \right] - \left[\frac{(1)^3}{3} \right] = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} u^2 \approx 8.66 u^2$$

7. Determina el área acotada por la parábola, presentar dos soluciones. Integrar con respecto a "x" y después integrar con respecto a "y". trazar la gráfica.

$y^2 + x - 4 = 0$

$y = \sqrt{4 - x}$

$x = 4 - y^2$

Con respecto a "Y"

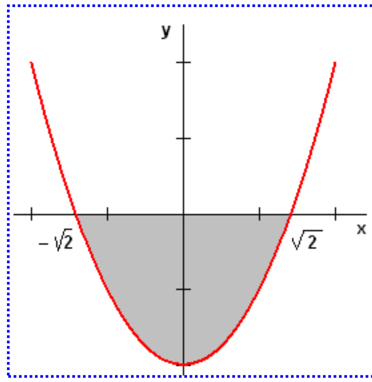
$$\int_0^2 (4 - y^2) dy = 4y - \left. \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \left[4(2) - \frac{(3)^3}{3} \right] - [0] = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5.33u^2$$

Con respecto a "X"

$$\int_0^4 \sqrt{4 - x}\, dx = -\int_0^4 \sqrt{4 - x}\, dx = -\left. \frac{2(4 - x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^4 = -\frac{2(4 - 4)^{\frac{3}{2}}}{3} - \left[\frac{-2(4 - 0)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] =$$

$$= \frac{2(8)}{3} = \frac{16}{3} = 5.33u^2$$

8) Calcule el área bajo la curva $y = x^2 - 2$ y el eje x. Traza la gráfica correspondiente.



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2x \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} - 2\left(\sqrt{2}\right) - \left[\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3} - 2\left(-\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{11.31}{3} = 3.77$$

X	Y
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2
3	7

9)Calcula el área acotada por la parábola el eje "y" y el eje "x".

$y^2 + x - 4 = 0 \longrightarrow y = \sqrt{4 - x} \longrightarrow 0 = \sqrt{4 - x} \longrightarrow 0 = 4 - x \longrightarrow x = 4$

$$A = \int_0^4 \sqrt{a - x}\,dx = \int_0^4 \sqrt{u}\left(-du\right) = -\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du$$

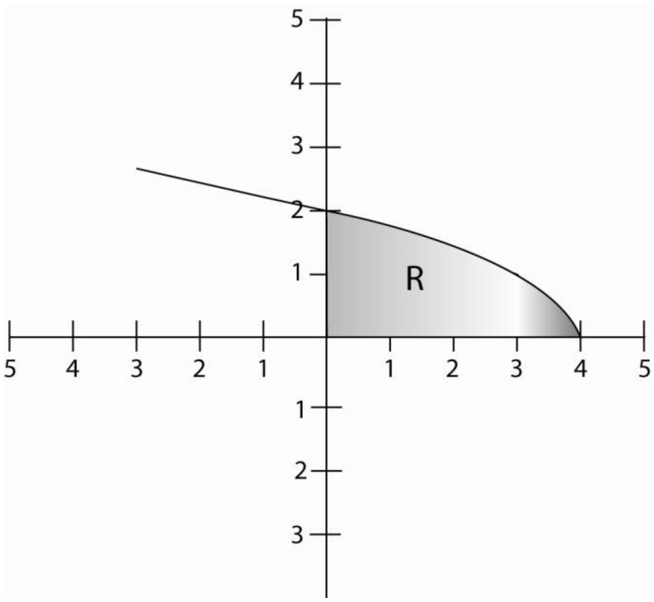
$u = 4 - x$

$du = -dx$

$-du = dx$

$$= \frac{-u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{(4 - x)^3}\Big|_0^4$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(4 - 4)^3} - \left[-\frac{2}{3}\sqrt{(4 - 0)^3}\right] = 3.77$$



X	Y
-3	2.6
-2	2.4
-1	2.2
0	2
1	1.7
2	1.4
3	-1
4	0

ACTIVIDAD II.

I.- AREA BAJO LA CURVA

Determina el área de la región limitada en cada caso y traza la gráfica señalando la región pedida.

1) $y = x^3 - x$ ***y el eje "x"***

2) $y^2 - x - 1 = 0$ ***y el 2º cuadrante***

3) $y = 3 - x^2$ ***y el eje "x"***

4) $xy = 4$ ***, el eje "x" y las rectas:*** $2x - 1 = 0$ **y** $x - 1 = 0$

5) $y = x^2 - 7x + 6$ ***y las rectas y=o, x=2 Y x=6.***

6) $y = x + 1,$ ***y=0 , x=2 Y x = 6.***

7) $x - 2y + y^2 = 8$ **el eje " y" y las rectas :** $y + 1 = 0,\ y - 3 = 0$

8) $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ ***y el eje "x"***

9) $y = 2x - 5$, *y=0, x=3 y x=7*

10) $x = 4 - y^2$ *y las rectas y=2, y= -1 Y x=0.*

11) $x = 8 + 2y - y^2$ *y las rectas y=-1, y=3 Y x=0.*

12) $y = 4x - x^2$ *y el eje de las x.*

13) $(y - 2)^2 = 8(x + 4)$ *y eje "y"*

14) $x\,y = 1$ *, el eje "y" y las rectas* $y - 2 = 0$; $y - 8 = 0$

15) $y^2 - 12x - 8y - 20 = 0$ *y el eje "y"*

16) Encuentra el área de la elipse. (Se sugiere emplear la fórmula CANÓNICA de la ELIPSE)

17) Encuentra el área de la circunferencia. (Se sugiere emplear la fórmula canónica de la circunferencia)

18) Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las "x" y las coordenadas dadas en cada caso.

a) $y = x^3$
$x = 0$
$x = 4$

b) $y = 9 - x^2$
$x = 0$
$x = 3$

c) $y = x^3 + 3x^2 + 2x$
$x = -3$
$x = 3$

d) $y = x^2 + x + 1$
$x = 2$
$x = 3$

19) Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje "y" y las rectas dadas en cada caso.

a) $y^2 = 4x$
$y = 0$
$y = 4$

b) $y = 4 - x^2$
$y = 0$
$y = 3$

c) $y = |\ln|$
$y = 0$
$y = 2$

d) $x = 8 + 2y - y^2$
$y = -1$
$y = 3$

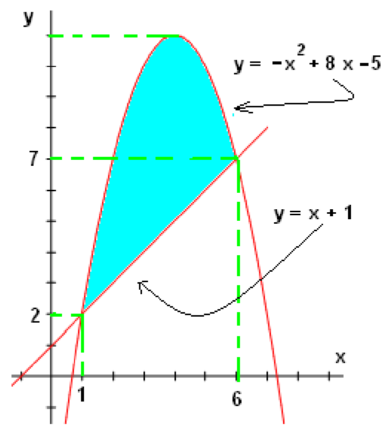
UNIDAD IV. APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

4.1.2 ÁREA ENTRE DOS CURVAS PLANAS.

1. **Determinar el área de la superficie limitada por las curvas.**

$$y=-x^2+8x-5$$
$$y=x+1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por estas 2 ecuaciones, hallamos los puntos de intersección de las curvas (1,2) y (6,7).



$$\int_1^6\left[(-x^2+8x-5)-(x+1)\right]dx=\int_1^6(-x^2+7x-6)dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-6x\Big]_1^6=\left[-\frac{6^3}{3}+\frac{7(6)^2}{2}-6(6)\right]=\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{7(1)^2}{2}-6(1)\right]=$$

$$=18+\frac{17}{6}=\frac{125}{6}u^2$$

2. **Determinar el área de la superficie limitada por curvas.**

$$y^2-2x+2y+7=0$$
$$x-y-8=0$$

Resolviendo el sistema d ecuaciones formado por las dos curvas, encontramos los puntos de intersección (5,3) y (11,3) e integrando con respecto a "y" tendremos:

$$x=y+8$$

$$x=\frac{y^2}{2}+y+\frac{7}{2}$$

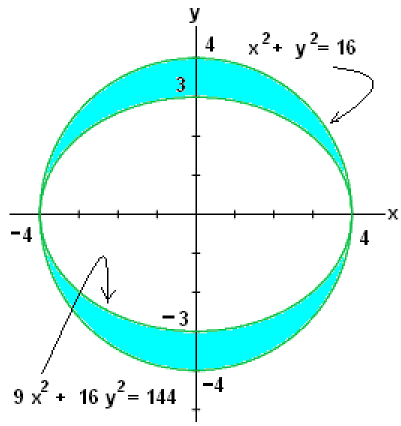
$$\int_{-3}^{3}\left[(y+8)-\left(\frac{y^2}{2}+y+\frac{7}{2}\right)\right]dy=$$

$$=\int_{-3}^{3}\left(-\frac{y^2}{2}+\frac{9}{2}\right)dy=-\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}y^2+\frac{9}{2}\int_{-3}^{3}dy=-\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}+\frac{9}{2}y=-\frac{y^3}{6}+\frac{9}{2}y\Big]_{-3}^{3}=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{6}+\frac{9}{2}(3)\right]-\left[-\frac{(-3)^3}{6}+\frac{9}{2}(-3)\right]=9-(-9)=18u^2$$

3. Determinar el área de la superficie limitada por las curvas. $x^2 + y^2 = 16$ Y $9x^2 + 16y^2 = 144$

Resolviendo el sistema de ecuaciones y graficando tenemos, que los puntos de intersección son (4,0) y despejando a "y" de ambas tenemos:



$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{144 - 9x^2}{16}} = \frac{\sqrt{9(16 - x^2)}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$$

$$\int_{-4}^{4}\left[\sqrt{16 - x^2} - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right]dx = \int_{-4}^{4}\frac{1}{4}\sqrt{16 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}\,dx$$

Aplicando fórmula:

$$a^2 = 16 \therefore a = 4$$

$$v^2 = x^2 \therefore v = x$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\arcsin\frac{x}{4}\right]_{-4}^{4} = \frac{x}{8}\sqrt{16 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{4}\Bigg]_{-4}^{4} =$$

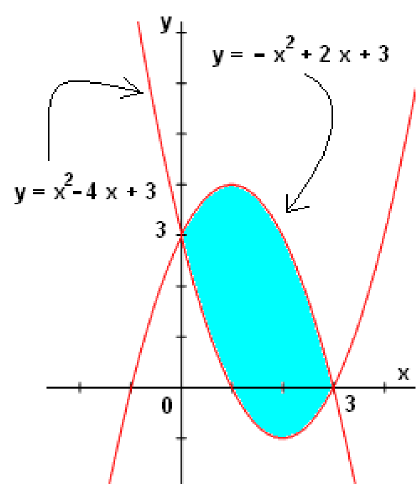
$$= \left[\frac{4}{8}\sqrt{16 - (4)^2} + 2\text{arcsen}\frac{4}{4}\right] - \left[\frac{-4}{8}\sqrt{16 - (4)^2} + 2\text{arcsen}\frac{-4}{4}\right] =$$

$$= 2\text{arcsen}(1) - 2(\text{arcsen}(-1)) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi - 3\pi = -2\pi$$

4. Calcular el área entre las curvas:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$



Graficando y resolviendo el sistema de ecuaciones formado por curvas obtenemos los puntos de intersección (3,0) y (0,3) así los vértices (1,4) y (2,-1).

Por lo tanto el área será:

$$\int_0^3\left[\left(-x^2 + 2x + 3\right) - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right]dx = \int_0^3\left(-2x^2 + 6x\right)dx =$$

$$= -2\int_0^3 x^2\,dx + 6\int_0^3 x\,dx = -2\frac{2x^3}{3} + 3x^2\Bigg]_0^3 =$$

$$= \left[-\frac{2(3)^3}{3} + 3(3)^2\right] - \left[-\frac{2(0)^3}{3} + 3(0)^2\right] = 9 - 0 = 9u^2$$

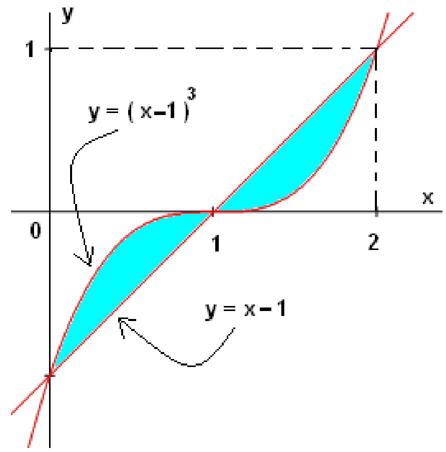
5. Determinar el área entre las curvas:

$$y=(x-1)^2$$
$$y=x-1$$

Graficando y resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las 2 curvas obtenemos los puntos de intersección (0,1), (1,0) y (2,1). Por lo tanto el área buscada será:

$$\int_0^2\left[(x-1)^3-(x-1)\right]dx=\int_0^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\Bigg]_0^2=\frac{(2)^4}{4}-(2)^3+(2)^2=0$$



6. **Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones: y=sen x; y=cos x, trazar la gráfica correspondiente. Para encontrar los puntos de corte se realiza el siguiente análisis:**

$$\cos 0^\circ = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sen 0^\circ = 0 \qquad sen\frac{\pi}{2}=1 \qquad sen\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

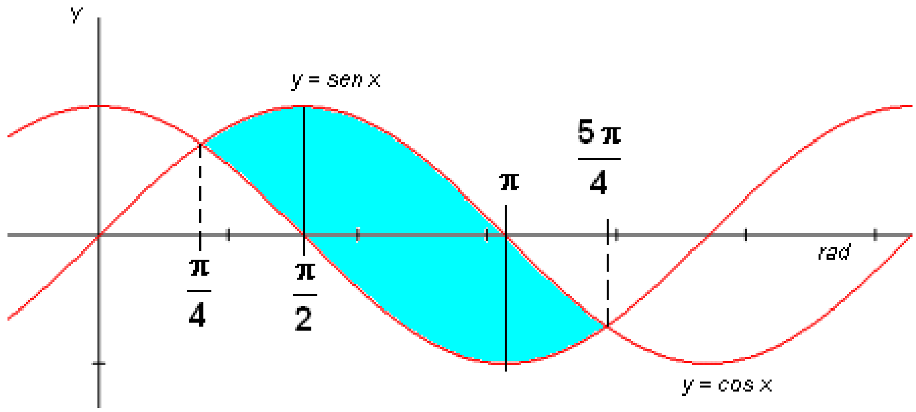
Los puntos de intersección de las dos curvas tienen la misma ordenada por lo que se igualan ambas ecuaciones :

Sen x = cos x ∴ Elevando al cuadrado ambos miembros :

$$\mathbf{sen^2x = cos^2 x \qquad sen^2x = 1 - sen^2x}$$

$$\mathbf{2sen^2x = 1 \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\mathbf{x = arcsen \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \qquad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}}$$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} senx-\cos x = -\cos x - senx\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = -\cos\frac{5\pi}{4} - sen\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

7. Determinar el área de la región limitada por la gráfica de las funciones.

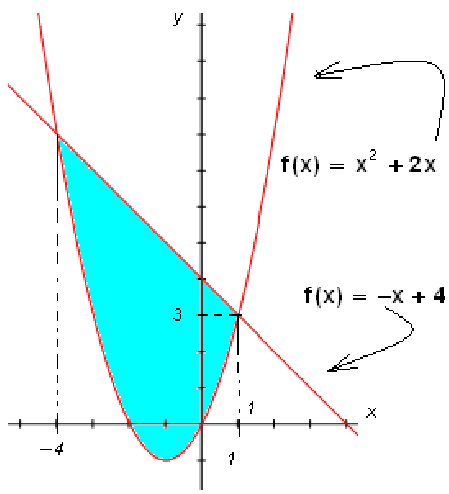
$$f(x) = x^2 + 2x$$
$$f(x) = -x + 4$$

$$\int_{-4}^{1}\left[x^2 + 2x - (-x+4)\right]dx = \int_{-4}^{1}\left[x^2 + 2x + x - 4\right]dx =$$

$$\int_{-4}^{1}\left[x^2 + 3x - 4\right]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x\Big]_{-4}^{1} =$$

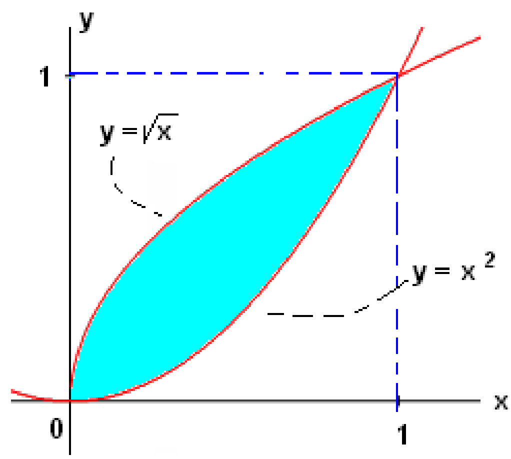
$$= -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 28 + 16 =$$

$$= \frac{-2+9+24-128+144+96}{6} = \frac{125}{6} \approx 20.8u^2$$



8. Determina el área de la región limitada por las gráficas de las funciones.

$$y = x^2$$
$$y = \sqrt{x}$$

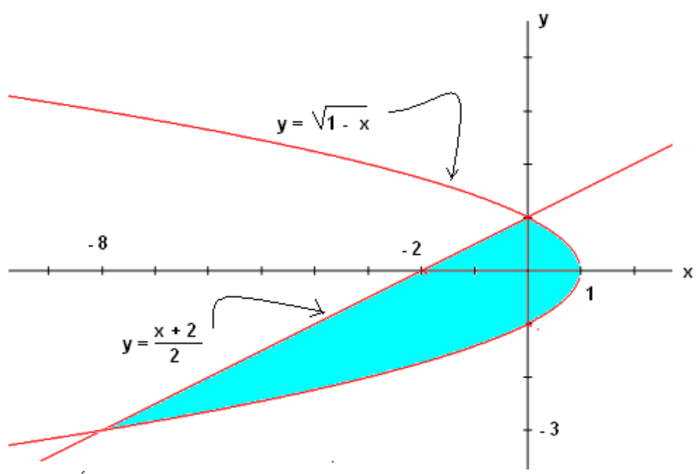


$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 (x)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \left. \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} u^2$$

9 . Determinar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones, selecciona el procedimiento más sencillo: Integrar con respecto al eje "x" o con respecto al eje "y".

$$y^2 = 1 - x \rightarrow y = \sqrt{1-x}$$
$$2y = x + 2 \rightarrow y = \frac{x+2}{2}$$



Igualamos y resulta:

$$\frac{x+2}{2} = \sqrt{1-x}$$
$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{1-x}\right)^2$$
$$\frac{x^2 + 4x + 4}{4} = 1 - x$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4 - 4x$$

$X^2 + 8X = 0 \qquad X(X+8) = 0 \qquad X_1 = 0 \qquad X_2 = -8$

$y_1 = \frac{(0)+2}{2} = 1 \rightarrow Y_2 = \frac{(-8)+2}{2} = -3$

$\therefore$ **Los límites de integración son : -3 , 1 y la integral queda**:

$$\int_{-3}^{1}(y^2-2y-3)dy=\frac{y^3}{3}+\frac{2y^2}{2}+3y\Big]_{-3}^{1}=\left[\frac{(1)^3}{3}+\frac{2(1)^2}{2}+3(1)\right]-\left[\frac{(-3)^3}{3}+\frac{2(-3)^2}{2}+3(-3)\right]=$$

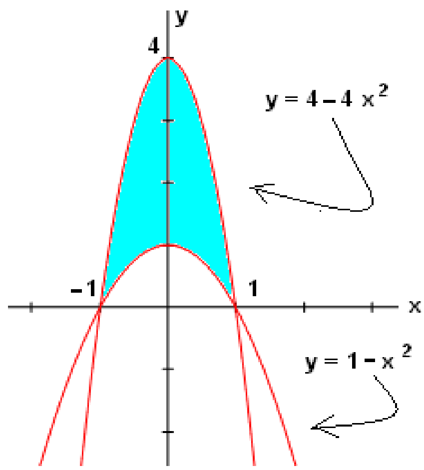
$$=\left[\frac{1}{3}+1-3\right]-[9-9-9]=-\frac{32}{3}=10.6u^2$$

10. Determina el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones dadas. Trazar la gráfica correspondiente.

$$y=4\left(1-x^2\right)$$
$$y=1-x^2$$

$$\int_{-1}^{1}4\left(1-x^2\right)-\left(1-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}4-4x^2-1+x^2=\int_{-1}^{1}3-3x^2=3x-x^3\Big]_{-1}^{1}=$$

$$=(3-1)-(-3+1)=3-1+3-1=6-2=4u^2$$



ACTIVIDAD III.

ÁREA ENTRE DOS CURVAS PLANAS

Determina el área de la región limitada en cada caso y traza la gráfica señalando la región pedida.

1) $y^2 = 4x$ **y la recta** $y = 2x-4$

2) $y = \sqrt{x}$ **y** $y=x-2$ **y el primer cuadrante.**

3) $y^2 - 4x = 0$ **y la recta:** $2x - y - 4 = 0$

4) $y = 6x - x^2$ **y** $x^2 - 2x - y = 0$

5) $y = 8x - x^2 - 5$ **y** $x + 1 = y$

6) $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$ **y su lado recto**

7) $y = 9 - x^2$ **y** $x - y + 3 = 0$

8) $x^2 + y - 2 = 0$ **y** $x + y = 0$

9) $x^2 = 4y$ **,** $y = x$ **,** $y = 1$

10) $y = x^2$ **,** $x + y = 2$ **y el eje x.**

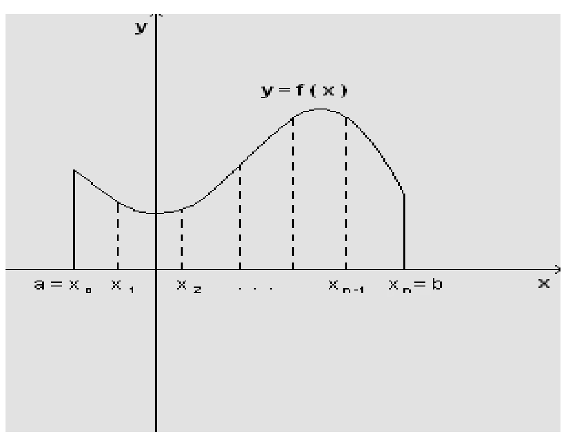
4.2.1 VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.

Llamaremos "Sólido de Revolución" a aquel que se engendra al hacer girar alrededor de un eje, una superficie plana.

Volumen de un sólido de revolución obtenido por la rotación en torno al eje "X" o "Y" de una región A

Sea f una función contínua en el intervalo: $[a,b]$,siendo $f(x) \geq 0$ para todo x, tal que $a \leq x \leq b$.

Consideremos el conjunto A , delimitado por el eje **X ,**la gráfica de f y las rectas : x=a y x=b.



Considerando una partiçión P del intervalo : [a,b] tal que :

P= $\{a = x, x\, , x \,\dots . x = b\}$ donde : $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\dots\dots<x_n=b$, siendo :

$$S(P,g) = \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(x_i)^2\, \Delta x_i$$

donde $x_{i-1} \leq x_{i-1} \leq x_i$ para todo " i " tal que: $\mathbf{1 \leq i \leq n}$

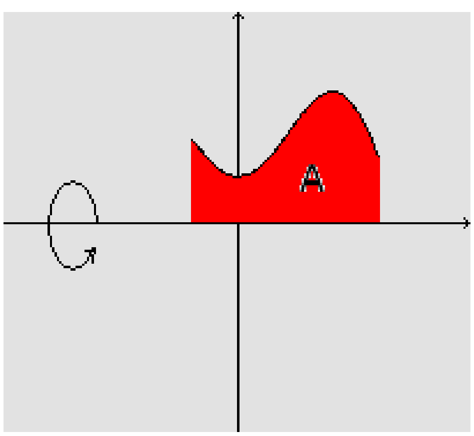
que és una suma de Riemann para toda función : $g(x) = \pi(f(x))^{2}$, relativa a la partición P del intervalo [a,b].

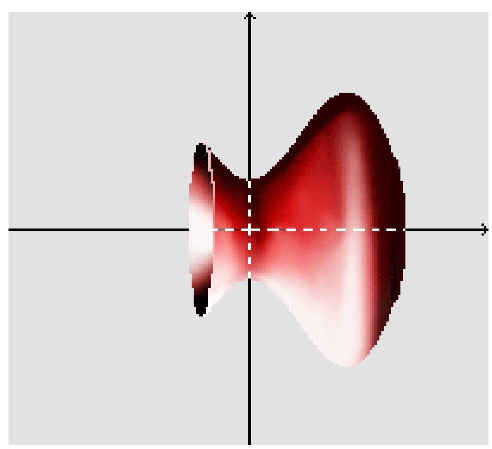
Definimos el volumen del sólido B como :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi . f(\bar{x}_i)^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi(f(x))^2\, dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

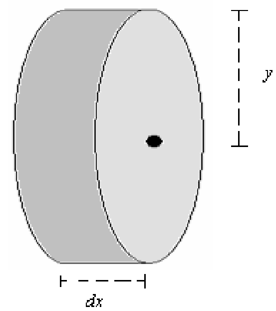
Es preciso observar que cada **sección transversal** del sólido B, obtenida a partir de $x\in[\, a,b\,]$., es en realidad un circulo con centro en el punto (x,0) y radio : f(x) y, por lo tanto, su área es : $\pi(f(x))^2$.

Finalmente B es el sólido obtenido a través de la rotación del conjunto A en torno al eje"X"





Consideremos que la superficie limitada por la gráfica de la función "f", el eje "x" y las rectas x=a y x=b gira alrededor del eje "x". Si dividimos esta superficie en "n" rectángulos, cada uno de ellos engendrará un cilindro recto cuyo volumen será $\boldsymbol{\pi\, [f(x)]^2\, dx}$ siendo **dx** su altura.

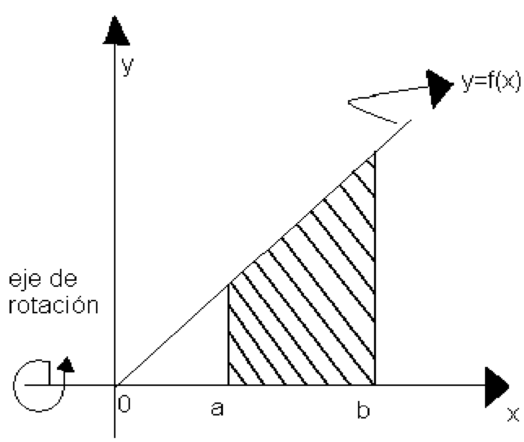


De lo anterior podemos concluir que:

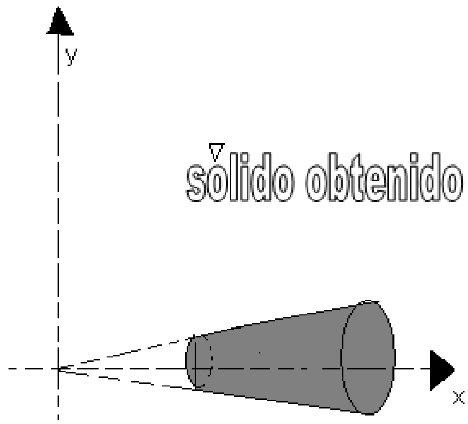
Cuando el eje de revolución es "x" tendremos: $\mathbf{V} = \pi\int_{a}^{b} \mathbf{f(x)dx}$ siendo **y=f(x)**

Cuando el eje de revolución es "y" tendremos: $\mathbf{V} = \pi\int_{a}^{b} \mathbf{f(y)dy}$ siendo **x=f(y)**

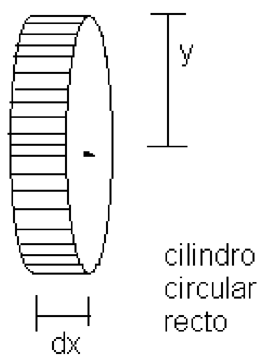
Como lo dijimos anteriormente, un "Solido de Revolucion" es aquel que se engendra al hacer girar alrededor de un eje una superficie plana.



En éste caso es la superficie limitada por la gráfica de la función "f", el eje "x" y las rectas x=a & x=b la cual gira alrededor del eje "x" , generando de modo instantáneo el siguiente ***cono recto truncado.***



Si dividimos esta superficie en "n" rectangulos, cada uno de ellos engendrará un cilindro recto:



Diferencial del Volúmen :

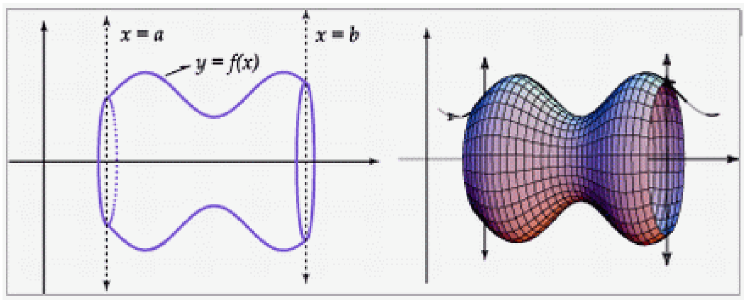
$dv = \pi y^2 dx$= Area de la Base por su altura.

El limite de la suma de los volumenes de los "n" cilindros engendrados cuando $n \to a$ será el volumen del sólido de revolución; esto es, la "suma" de los volumenes de los "n" cilíndros desde $x = a$ hasta $x = b$,nos da el volumen del sólido de revolución.

$v = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\ dx$ Cuando el eje de revolución es "x" siendo *y = f (x)*

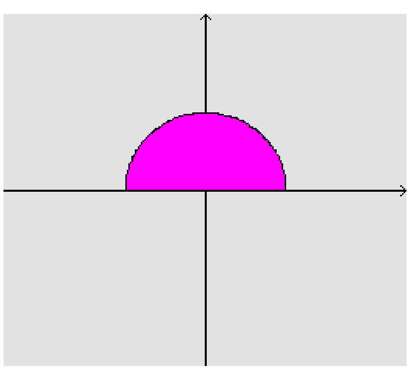
Cuando el eje de revolución es "y" tendremos $v = \pi \int_a^b x^2\ dy$ siendo *x = g (y)*

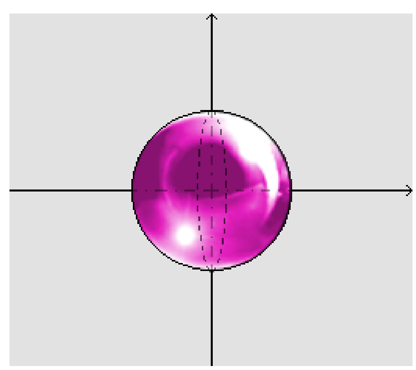
Siendo un *sólido de revolución* el sólido generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de una función cualquiera: y= f(x), el eje x y las gráficas de x=a y x=b , el eje x que es el eje de rotación de la región plana señalada anteriormente se convierte en un eje de simetría de dicho sólido y la sección recta plana perpendicular a dicho eje x , es un círculo.



Ejemplo 1

La región delimitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ que representa a un semicírculo, el eje **X** y las rectas: x+a=0 & x-a=0 gira alrededor del eje **X** originando como sólido a una esfera de radio: **a**

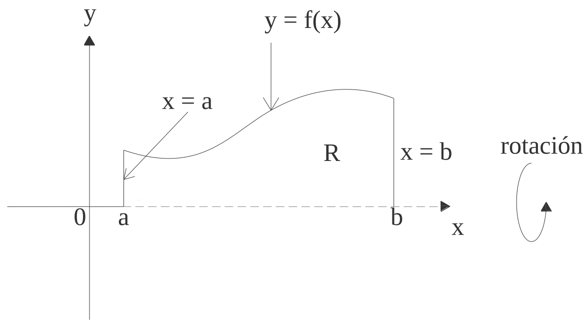


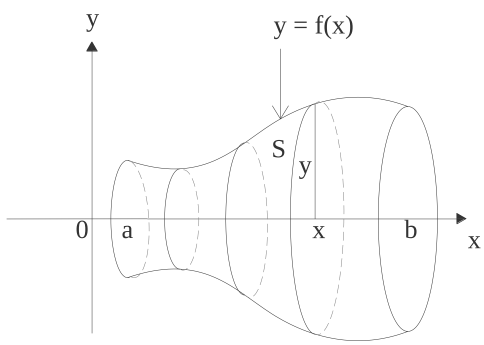


El volumen de la esfera generada está dado por:

$$V = \int_{-a}^{a} \pi\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\, dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi a^3$$

La esfera del Ejemplo 1 es un caso de un **sólido de revolución,** ya que se puede obtener al hacer girar un círculo en torno a un diámetro. En general, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar la región plana $\Re$ limitada por y = f(x). y = 0, x = a y x = b en torno al eje x .





Dado S se obtiene mediante una rotación, la sección transversal determinada en x perpendicular al eje x, es un disco circular de radio | y |= |$f(x)$|, entonces el área de la sección transversal es:

$$\mathbf{A(x)} = \pi y^2 = \pi\,[f(x)]^2$$

Por consiguiente, al usar la fórmula básica V = $\int_a^b A(x)dx$, se tiene la siguiente **fórmula de un volumen de revolución:**

$$\mathbf{V} = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx$$

En particular, puesto que la esfera se puede obtener haciendo girar la región comprendida bajo la semicircunferencia:

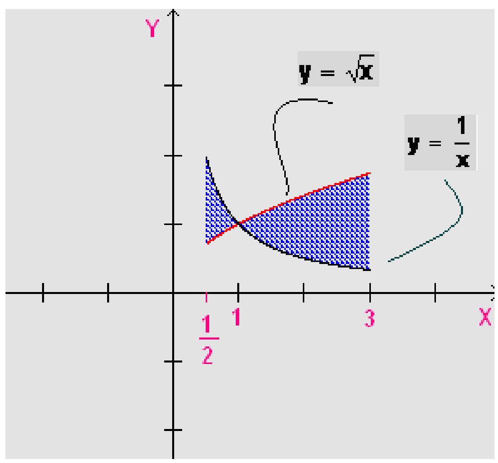
$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad -r \le x \le r$$

En torno al Ejemplo 1 se podía haber resuelto utilizando la fórmula del volumen con $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; a= -r y b = r.

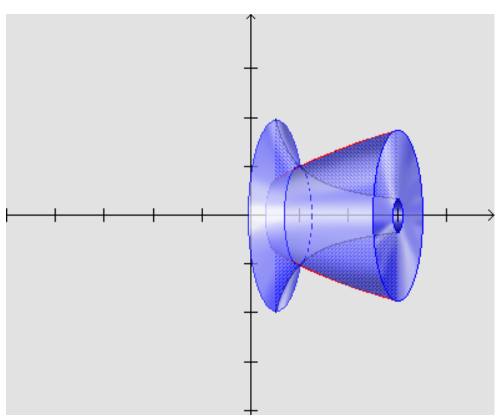
Ejemplo 2

La región comprendida por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y $y = \frac{1}{x}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Gira en torno al eje x :



La rotación de esta región genera el siguiente sólido con un hueco:



Calculando la intersección entre las dos gráficas: $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$; $x\sqrt{x} = 1$; $x^{\frac{3}{2}} = 1$; $x = 1$

$$V_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right] = \pi\left(-1+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \pi\frac{5}{8}$$

El volumen del sólido resultante está dado por: $V = V_1 + V_2$

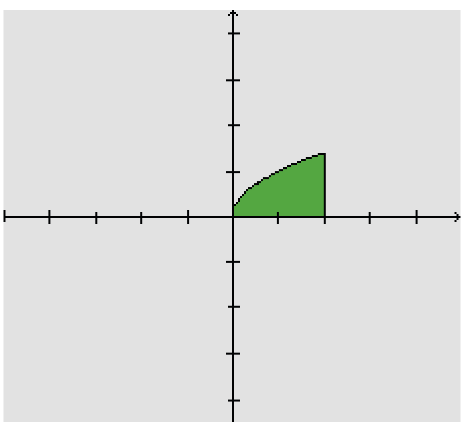
Siendo Y :

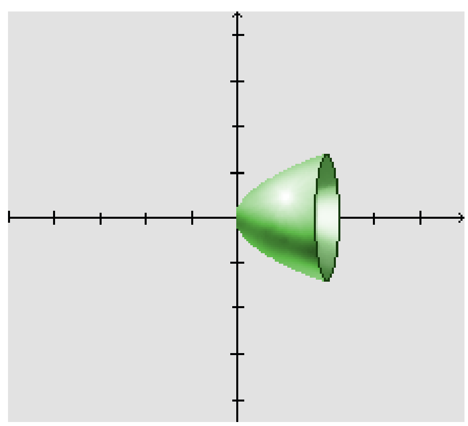
$$V_2 = \int_1^3 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2$$

Finalmente: $$V = \pi\left(\frac{10}{3} + \frac{5}{8}\right) = \pi\frac{80+15}{24} = \frac{95}{24}\pi$$

Ejemplo 3

Una región del plano delimitada por el eje X, la gráfica de $\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{x}}$ en el intervalo





$\mathbf{0 \le x \le 2}$ es rotada alrededor del eje X.

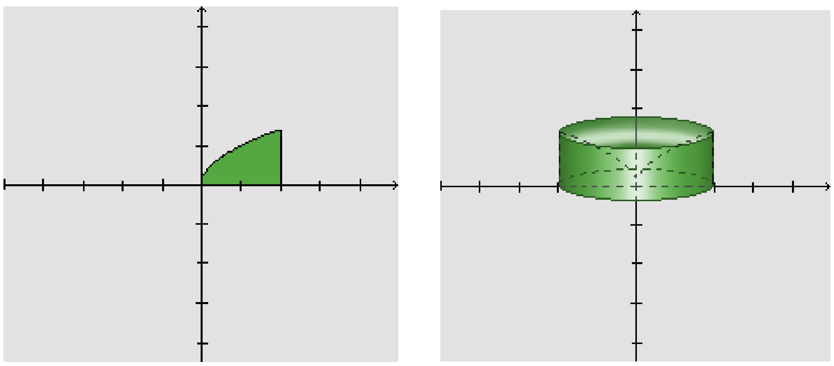
El volumen del sólido generado está dado por: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx$ ------I

$$V = \int_0^2 \pi x\, dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2\pi$$

Ejemplo 4

Si la misma región del problema anterior se hace girar en torno al eje Y ,el sólido obtenido es diferente y su volumen queda definido por : $V=\pi\int_a^b (f(y))^2\,dy$ ------**II**

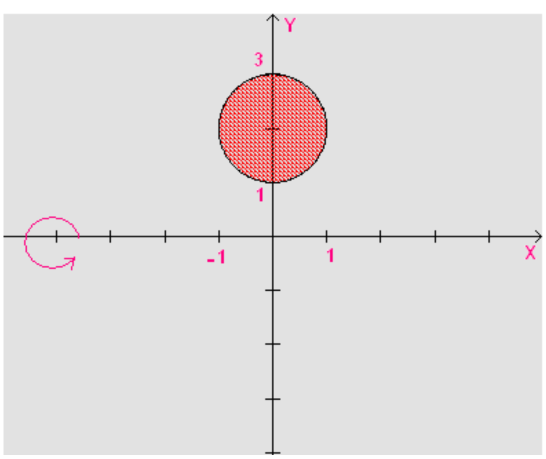
$$V=\int_0^{\sqrt{2}}\pi(4-y^4)\,dy=\pi\left[4y-\frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}=\pi\frac{16\sqrt{2}}{5}$$



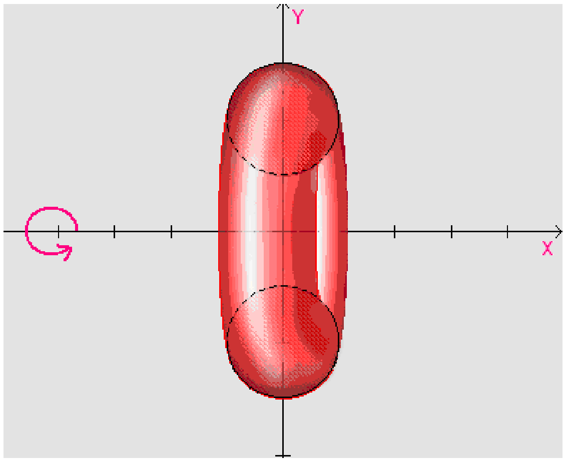
Ejemplo 5

Calcule el volumen del sólido obtenido por la rotación, en torno al eje **x**, de la curva: $\mathbf{x^2+(y-2)^2=1}$

La región indicada es la siguiente



Haciéndola rotar obtenemos un toroide:



Como este sólido está hueco podemos observar un radio interior y un radio exterior por lo que su volumen se calculará considerando la fórmula:

$$V = \pi\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx$$ ---------III

Donde f(x) es el radio exterior y g(x) es el radio interior.

Despejando "y" tenemos que: $y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$

De donde $f(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$

Aplicando: III

$$V = \pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx =$$

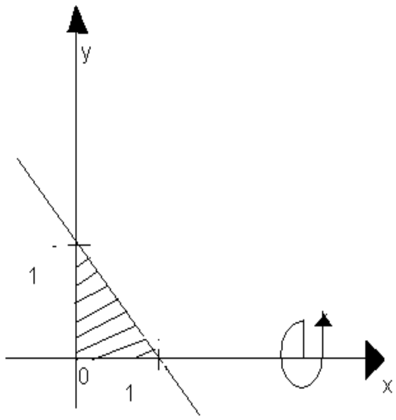
$$= \pi\int_{-1}^{1}[4 + 4\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 - 4 + 4\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2]\, dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$V = 8\pi\left[\frac{1}{2}\text{arcsen}\,1 - \frac{1}{2}\text{arcsen}(-1)\right] = 4\pi\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 4\pi^2.$$ **unidades cúbicas.**

CALCULAR EL VOLUMEN DE LOS SÓLIDOS QUE SE FORMAN AL GIRAR LA REGIÓN LIMITADA POR LA CURVA DADA ALREDEDOR DEL EJE "X".

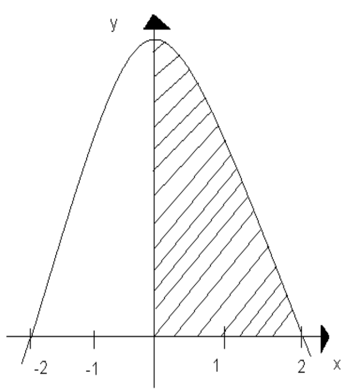
1.- $\boldsymbol{y = -x + 1 \quad de \quad x = 0 \quad a = 1}$



$$v = \pi \int_0^1 y^2\,dx = \pi \int_0^1 (-x+1)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right] = \left[\frac{1^3}{3} - (1)^2 + 1\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0\right] = \pi\left[\left(\frac{1}{3}\right) - 0\right] = \frac{\pi}{3}\,u^3$$

2.- $\boldsymbol{y = 4 - x^2 \quad de \quad x = 0 \quad a \quad x = 2}$



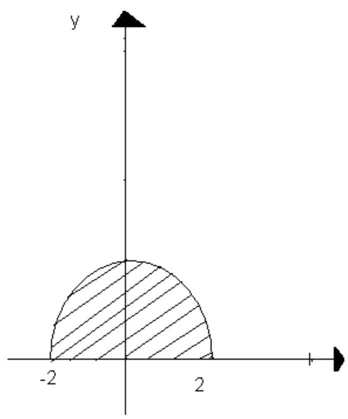
$$v = \pi \int_0^2 y^2\,dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)dx = \pi \left[16 \int_0^2 dx - 8 \int_0^2 x^2\, dx + \int_0^2 x^4 dx\right]$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right] = \pi \left[(16(2) - \frac{8(2)^3}{3} + \frac{2^5}{5}) - (16(0) - \frac{8(0)^3}{3} + \frac{0^5}{5})\right]$$

$$= \pi \left[\frac{256}{15} - 0\right] = \frac{256\pi}{15} u^3$$

3.- $\boldsymbol{y = \sqrt{4 - x^2}}$ $\boldsymbol{de}$ $\boldsymbol{x = -2}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{x = 2}$

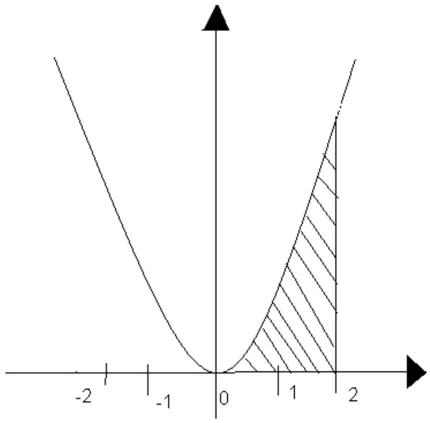


$$v = \pi \int_{-2}^{2} y^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$\pi \left[4 \int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx\right] = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right] = \pi \left[\left(4(2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 8 + \frac{8}{3}\right) = \pi \left[\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right) = \pi \left[\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right] = \frac{32}{3} \pi u^3$$

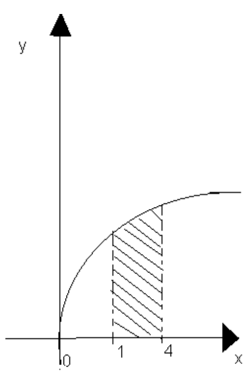
4.- $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ $\boldsymbol{de}$ $\boldsymbol{x = 1}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{x = 4}$



$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]$$

$$v = \pi \left[\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \pi \left[\frac{32}{5} - 0\right] = \frac{32\pi}{5} u^3$$

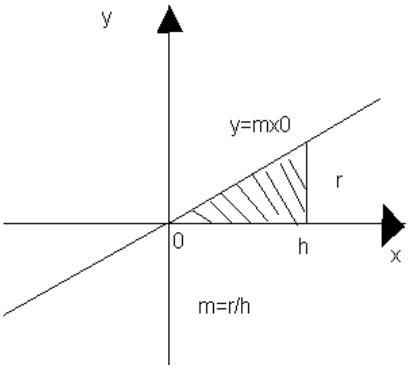
5.- $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ ***de*** $\boldsymbol{x = 1}$ ***a*** $\boldsymbol{x = 4}$



$$v = \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\right)\right] = \pi \left[8 - \frac{1}{2}\right] = \frac{15}{2} \pi u^3$$

6.- $\boldsymbol{y = mx \quad de \quad x = 0 \quad a \quad x = h}$



$$v = \pi \int_0^h (mx)^2 dx$$

Sea $\quad u = mx \;;\; \frac{du}{dx} = m \;;\; \frac{du}{m} = dx$

$$v = \frac{\pi}{m}\left[\frac{u^3}{3}\right] = \frac{\pi}{m}\left[\frac{(mx)^3}{3}\right] = \frac{\pi}{m}\left[\frac{(mh)^3}{3} - \frac{m(0)^3}{3}\right]$$

$$v = \frac{\pi}{m}\left[\frac{(mh)^3}{3} - 0\right] = \frac{\pi m^2 h^3}{3} = \frac{\pi(\frac{r}{h})^3 h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Volumen del cono : $\frac{\pi r^2 h}{3}$

Problemas resueltos

Calcular el volumen de los sólidos que se forman al girar la región limitada por las gráficas de las funciones dadas alrededor del eje "x" en cada caso.

P1.-

$y = -x + 1$
$x = 0$
$x = 1$

$$y = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 (-x+1)dx = \pi\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1^3}{3} - (1)^2 + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2 + 0\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{3}\right) - 0\right] = \frac{\pi}{3}u^2$$

P2.-

$2. y = 4 - x^2$
$x = 0$
$x = 2$

$$volúmen = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right)dx = \pi\left[16\int_0^2 dx - 8\int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 x^4 dx\right] =$$

$$= \pi\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left[\left(16(2) - \frac{8(2)^3}{3} + \frac{2^5}{5}\right) - \left(16(0) - \frac{8(0)^3}{3} + \frac{0^5}{5}\right)\right] = \pi\left[\frac{256}{15} - 0\right] = \frac{256\pi}{15}u^3$$

P 3.-

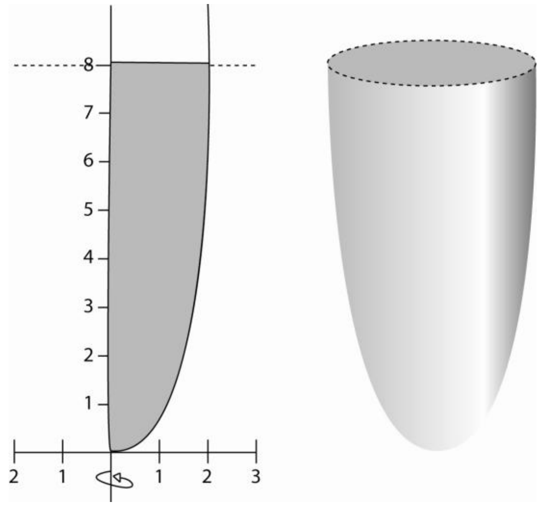
$3. y = \sqrt{4 - x^2}$
$x = -2$
$x = 2$

$$y = \pi\int_{-2}^2 y^2 dx = \pi\int_{-2}^2 \left(4 - x^2\right)dx = \pi\left[4\int_{-2}^2 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx\right] = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 =$$

$$= \pi\left[\left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \pi\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right)\right] = \pi\left[\frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right] = \frac{32}{3}\pi u^3$$

P4.- **Calcula el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ alrededor del eje "y".**



$$V = \pi\int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy$$

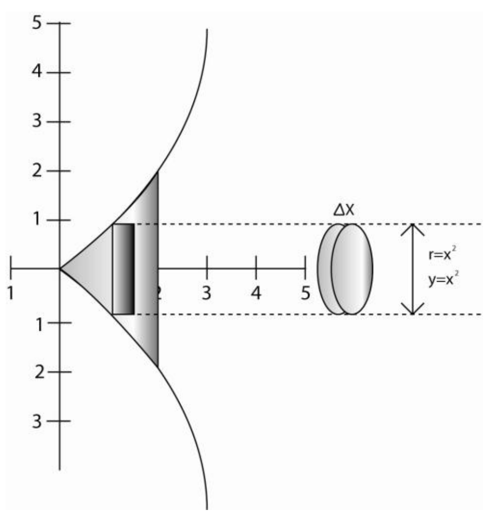
$$V = \pi\left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \pi\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8$$

$$V = \pi\left[\frac{3}{5}8^{\frac{5}{3}}\right] = \pi\cdot\frac{3}{5}\cdot 2^5 = \frac{96\pi}{5}$$

P5. **Calcula el volumen del solido generado al hacer rotar sobre el eje "x" la región del plano limitado por la curva $f(x) = x^2$, el eje x, el valor $x = 0$ y la recta $x = 2$.**

$$V = \pi\int_0^2 \left(x^2\right)dx = \frac{\pi x^5}{5}\Big|_0^2$$

$$V = \frac{32\pi}{5}u^3 = 20.10u^3$$



ACTIVIDAD III.

➢ VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.

- *DETERMINA EL VOLUMEN DEL SÓLIDO FORMADO HACIENDO ROTAR SOBRE EL EJE INDICADO LA REGIÓN LIMITADA POR LAS FUNCIONES SEÑALADAS EN CADA CASO:*

- Traza la gráfica y el dibujo del sólido formado en (3 D).

1) Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la región del plano comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x, y las rectas x=0 y x=4, al girar alrededor del eje x.

2) Calcular el volumen del sólido de revolución, generado por la región del plano comprendida por $y = \sqrt{x}$, x=1 y x=4, al girar alrededor de la recta y=1.

3) Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la región del plano comprendida entre $y^2 - x + 1$ y la recta x=3, al girar alrededor de la recta x=3

4) La región del plano comprendida entre la curva $x^2 - y + 1 = 0$ y la recta, gira $x + y - 3 = 0$ alrededor del eje X. Calcular el volumen del sólido generado.

5) La región del plano comprendida entre la parábola $x^2 - y = 0$ y la recta $2x - y = 0$ gira alrededor del eje Y. Calcular el volumen del sólido generado.

6) $y = x^2 + 2$, $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $y = 0$; rotación sobre el eje "x"

7) $xy = 1$, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $y = 0$; rotación sobre el eje "x"

8) $9x^2 + 4y^2 = 36$; rotación sobre el eje "x"

9) $9x^2 + 4y^2 = 36$; rotación sobre el eje "y"

10) $y = x^3$, $y - 8 = 0$, $x = 0$; rotación sobre el eje "y"

11) $y - x = 0$, $y = x^2$; rotación sobre el eje y=2

12) $y - x = 0$, $y = (x - 2)^2$

a) eje de rotación "x"

b) eje de rotación "y"

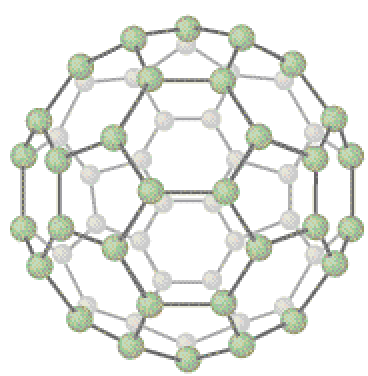
13) $xy - 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$ *; rotación sobre el eje "x"*

14) Hallar el volumen de la esfera generada por la rotación del círculo: $x^2 + y^2 = r^2$ *alrededor de su diámetro*.

15) Encontrar el volumen del sólido que se genera cuando la región entre las gráficas de $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$ y $g(x) = x$, *en el intervalo* $[0,2]$ *gira en torno al eje "x".*

16) Encontrar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las curvas: $y^2 = 4x$ y $y - x = 0$ *alrededor del eje "x".*

17) Encuentra el volumen de un cono circular recto de radio: "r" y altura: "h"



SOLUCIONES DE LA ACTIVIDAD I

1)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] = -\frac{5}{72}$$

2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

3)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$$

4)

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 2x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

5)

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

6)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

7)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \left(\sec^2 x - 1 \right) dx = \left[\operatorname{tg} x - x \right]_0^{\pi} = -\pi$$

8)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, \cos x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x \right]_0^{\pi} = 0$$

9)

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left(x^2 - 1 \right) \right]_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln 8 - \ln 3 \right) = \ln \sqrt{\frac{8}{3}}$$

10)

$$\int_2^3 \frac{dx}{x \ln^4 x}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\ln^4 x} = \int_2^3 \ln^{-4} x \cdot \frac{1}{x}dx = \left[-\frac{1}{3\ln^3 x}\right]_2^3 = -\frac{1}{3\ln^3 3} + -\frac{1}{3\ln^3 2}$$

11)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\operatorname{sen} x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x\right)\ dx =$$

$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

12)

$$\int_0^{\pi} \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\ dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\ dx = \left[e^{\operatorname{sen} x}\right]_0^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$$

13)

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\ dx$$

$$\int x^2 \cos x\, dx$$

$$u = x^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2x$$

$$v' = \cos x \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} x$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$u = x \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$$

$v' = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos x$

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\, dx\right) =$

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$

$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = \left[x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} = -2\pi$

14)

$\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2\, dx$

$\arccos x = t \qquad x = \cos t \qquad dx = -\operatorname{sen} t\, dt$

$1 = \cos t \qquad t = 0$

$-1 = \cos t \qquad t = \pi$

$\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2\, dx = -\int_{\pi}^{0} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt$

$u = t^2 \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 2t$

$v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{\text{integrar}} v = -\cos t$

$\int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos t\, dt$

$u = t \xrightarrow{\text{derivar}} u' = 1$

$v' = \cos t \xrightarrow{\text{integrar}} v = \operatorname{sen} t$

$\int_0^{\pi} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + 2\left(\left[t \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dx\right) =$

$= \left[-t^2 \cos t + 2t \operatorname{sen} t + 2\cos t\right]_0^{\pi} = \left(\pi^2 - 4\right) u^3$

15)

$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

$x = t^2$ $\quad dx = 2t\,dt$

$4 = t^2$ $\quad t = 2$

$0 = t^2$ $\quad t = 0$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 2\left[t - \ln\left(1+t\right)\right]_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

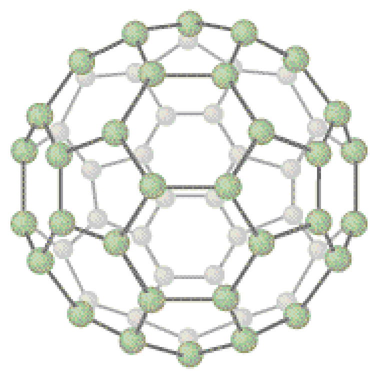


Bibliografía

- Ayres, F. "Cálculo Diferencial e Integral". Serie SCHAUM, Mc Graw-Hill, México.
- *Bosch-Guerra.* "Cálculo Diferencial e Integral".Ed.Publicaciones Cultural,México
- *Del Grande, D.* "Cálculo Elemental". Ed. Harla, México
- *Elfriede W.* " Didáctica _ Cálculo Integral".Grupo Editorial Iberoamérica.México.
- *Finney,R.L.* "Cálculo de una Variable". Ed.Prentice Hall,México.
- *Fuenlabrada, S.* "Cálculo Integral". Ed. Trillas, México
- *Granville,W.A.* "Cálculo diferencial e integral", Ed. Limusa, México
- *Leithold, L.* "Cálculo", Ed. Oxford University Press, México
- *Purcell, E.J.* "Cálculo con Geometría Analítica".Ed.Limusa, México.
- *Stewart, J.* "Calculo de una variable". Ed.Thompson, México.

- SWOKOWSKY, E. "CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA". ED. IBEROAMERICANA, MÉXICO.
- ZILL,D.G. "CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA"ED. IBEROAMERICANA, MÉXICO.
- FINNEY,R.L. "CÁLCULO DE UNA VARIABLE". ED.PRENTICE HALL,MÉXICO.

PÁGINAS ELECTRÓNICAS



- http://www.vitutor.com
- http://www.vadenumeros.es
- http://www.vadenumeros.es/index.htm
- http://www.acienciasgalilei.com
- HTTP://WWW.MATEMATICASBACHILLER.COM
- HTTP://WWW.MATEMATICASBACHILLER.COM/TEMARIO/CALCULIN/TEMA_01/INDICE.HTML